UDK 627.824:624.046.001.7 Primljeno 27. 4. 2005.

Neki numerički postupci rješavanja istjecanja iz akumulacije

Ivica Kožar, Danila Lozzi-Kožar

Ključne riječi

hidrotehnička akumulacija, istjecanje iz akumulacije, numerički postupci, ravnoteža masa, diferencijalna jednadžba

I. Kožar, D. Lozzi-Kožar *Izvorni znanstveni rad*

Neki numerički postupci rješavanja istjecanja iz akumulacije

Opisuje se određivanje visine vode u akumulaciji poznatog obujma, u koju ulazi poznata količina vode, a izlaz vode je moguć preko preljeva ili na neki drugi način. Za razliku od metoda koje se baziraju na integralnoj formulaciji ravnoteže masa autori razvijaju diferencijalnu formulaciju problema. Pri tome se uvodi novi parametar „derivacija funkcije kapaciteta akumulacije“. Usporedba dvaju pristupa pokazuje da je diferencijalna formulacija jednostavnija i točnija u primjeni.

Key words

water storage reservoir, evacuation of water from storage reservoir, numerical procedures, mass balance, differential equation

I. Kožar, D. Lozzi-Kožar *Original scientific paper*

Some numerical procedures for solving reservoir leakage difficulties

The authors describe procedures for determining the level of water in the water storage reservoir of known volume, to which a known quantity of water is supplied, and from which the water can be evacuated via an overflow or in some other way. Unlike methods that are based on an integral formulation of mass balance, the authors have developed a differential formulation of the problem. At that, they have introduced a novel parameter "storage capacity function derivative". The comparison of these two approaches reveals that the differential formulation is simpler and more accurate in practical use.

Mots clés

retenue, évacuation d'eau de la retenue, procédés numériques, équilibre des masses, équation différentielle

I. Kožar, D. Lozzi-Kožar *Ouvrage scientifique original*

Quelques procédures numériques pour l'analyse de la décharge d'eau des retenues

Les auteurs décrivent les procédures pour la détermination du niveau d'eau dans les retenues à niveau d'eau connu, alimentées en une quantité d'eau connue, et desquelles l'eau pet être évacuée par un déversoir ou d'une autre manière. A la différence des méthodes basées sur une formulation intégrale de l'équilibre des masses, les auteurs ont développé une formulation différentielle du problème. Dans ce cadre, ils ont introduit un nouveau paramètre de "dérivé de la fonction de capacité de la retenue". La comparaison de ces deux approches montre que la formulation différentielle est plus simple et plus précise dans l'application pratique.

Ключевые слова

гидротехническое водохранилище, вытекание из водохранилища, числовые способы, равновесие масс, дифференциальное уравнение

И. Кожар, Д. Лоци-Кожар *Оригинальная научная работа*

Некоторые числовые способы решения вытекания из водохранилища

В работе описывается определение высоты воды в водохранилище известного объёма, в которое входит известное количество воды, а выход воды возможен через перелив или каким-то другим способом. В отличие от методов, основывающихся на интегральной формуляции равновесия масс, авторы развивают дифференциальную формуляцию проблемы. При этом вводится новый параметр „деривация функции мощности водохранилища“. Сравнение двух подходов показывает, что дифференциальная формуляция является более простой и более точной при применении.

Schlüsselworte

hydrotechnischer Speicher, Ausfluss aus dem Speicher, numerische Verfahren, Massengleichgewicht, Differentialgleichung

I. Kožar, D. Lozzi-Kožar *Wissenschaftlicher Originalbeitrag*

Einige numerische Verfahren für die Lösung des Ausflusses aus dem hydrotechnischen Speicher

Man beschreibt die Feststellung der Wasserhöhe im Speicher mit bekanntem Rauminhalt, in den eine bekannte Wassermenge einfliesst, wobei der Ausfluss über den Überlauf oder andersartig möglich ist. Zum Unterschied von Verfahren die sich auf der integralen Formulierung des Massengleichgewichts begründen, entwickeln die Verfasser eine differentiale Formulierung des Problems. Dabei wird ein neuer Parameter eingeführt, die "Ableitung der Funktion des Fassungsvermögens des Speichers". Der Vergleich beider Verfahren zeigt dass die differentiale Formulierung einfacher und genauer in der Anwendung ist.

Autori: Prof. dr. sc. **Ivica Kožar**, dipl. ing. građ.; **Danila Lozzi-Kožar**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, V. C. Emina 5, Rijeka

1 Uvod

U ovome će se članku razmatrati primjena nekih numeričkih metoda u analizi istjecanja vode iz akumulacije (u engleskome govornom području to je *reservoir routing method*, [5]). Pokušava se prikazati i usporediti matematički zasnovane metode prikladne za opis istjecanja iz akumulacije; naime, iskusan inženjer može rješavanju problema pristupiti intuitivno i smisliti postupke koji daju rezultate, ali će se pokazati da je matematički dobro definirana procedura u prednosti. Daljnja prednost matematički definiranog problema jest mogućnost rješavanja poznatim matematičkim 'alatom' i daljnje razvijanje problema, na primjer proširenje na problem optimizacije istjecanja. Dodatnu motivaciju može nam pružiti klasični Prandtlov tekst (preuzet iz [1]): „Hidrodinamika ima malo značenje za inženjere zbog velikoga matematičkoga znanja potrebnog za njeno razumijevanje, a zanemarive mogućnosti primjene njezinih rezultata“; upravo ovdje želimo prikazati prednost (i time praktičnost) postupka zasnovanog na jednadžbama hidrodinamike.

Matematički opis problema temeljit će se na jednadžbi očuvanja mase (*mass balance equation* [3]) koja je jedna od osnovnih jednadžbi u hidrotehnici i tehnici općenito. Čini se da se u hrvatskome govornom području udomaćio izraz 'jednadžba kontinuiteta', iako su izrazi ekvivalentni (jednadžba kontinuiteta može se dobiti i matematičkim formalizmom, primjenom Gaussova teorema divergencije na integralni oblik jednadžbe očuvanja mase, [3]. Za izvod jednadžbe kontinuiteta iz jednadžbe očuvanja mase preko „kotrolnih volumena“, npr. [4]). U svim jednadžbama pretpostavljamo nestlačivost tekućine (uobičajeno za rezervoare), tako je primjerice u jednadžbi kontinuiteta $\partial\rho/\partial t = 0$.

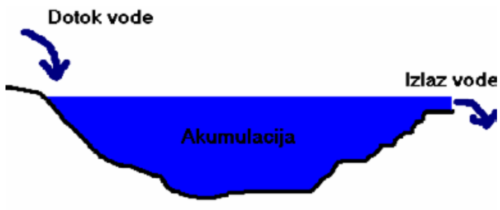
U drugome dijelu članka opisuje se integralni oblik jednadžbe očuvanja mase i iterativnu metodu koja se može razviti na temelju njezina razmatranja. Treći dio prikazuje diferencijalni oblik iste jednadžbe koji vodi do opisa problema s pomoću diferencijalne jednadžbe. Upravo je taj oblik najpovoljniji za rješavanje istjecanja iz rezervoara, a u općem obliku nije ga bilo moguće pronaći niti u domaćoj, niti u stranoj literaturi. Izvedena diferencijalna jednadžba rješava se raznim poznatim matematičkim metodama. U četvrtom se dijelu na primjeru uspoređuju rezultati integralnom i diferencijalnom formulacijom, a peti dio daje preporuke za praktično rješavanje problema na računalu.

2 Integralni oblik jednadžbe ravnoteže masa

Klasično razmatranje jednadžbe ravnoteže masa provodi se razmatranjem kontrolnog volumena Ω za koji vrijedi [3]

$$\begin{Bmatrix} prirast \\ mase \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ulazna \\ masa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} izlazna \\ masa \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} \rho d\Omega \tag{1}$$

Skica problema koji razmatramo najbolje ilustrira veličina za koju želimo uspostaviti odnos (integralnom ili diferencijalnom jednadžbom) (slika 1.).



Slika 1. Skica razmatranog problema

Metoda koju je opisao [5] United States Department of Agriculture osniva se na jednadžbi kontinuiteta dolazne i odlazne mase vode i pripada integralnim jednadžbama

$$\Delta t \frac{I_1 + I_2}{2} - \Delta t \frac{O_1 + O_2}{2} = S_2 - S_1 \tag{2}$$

gdje je Δt vremenski interval, I_1 i I_2 ulazna količina vode na početku i na kraju vremenskog intervala, O_2 i O_1 izlazna količina vode, a S_2 i S_1 sadržaj rezervoara na početku i kraju vremenskog intervala. Da se radi o integralnoj formi postaje jasno kad se uvidi da sadržaj rezervoara S treba pratiti kumulativno u vremenu jer izlaz O ovisi o visini vode u rezervoaru, dakle zapravo

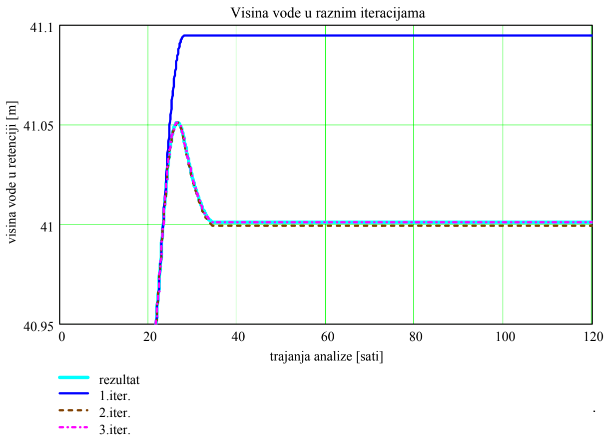
$$\int_T I dt - \int_T O dt = S \tag{3}$$

gdje je T vrijeme simulacije.

Za diskretne ulazne podatke (kako je zadana ulazna količina vode) bolje je integrale zamijeniti približnim izrazima – zbrajanjem, pa jednadžba ravnoteže masa (količine vode) poprima oblik

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_T \left(Q^i_{ulaz} + Q^{i-1}_{ulaz}\right)\cdot \Delta t - \sum_T Q^i_{izlaz} \cdot \Delta t = \Delta Q \\ &Q^i_{izlaz} = \mathrm{H}(H - H_p)\cdot q_{iz}(H - H_p) \\ &H = f\left(\sum Q_{ulaz} - \sum Q_{izlaz}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Vidimo da je jednadžba (4) u obliku prediktor – korektor u odnosu na visinu vode H u akumulaciji. U [5] nije navedeno da je to prediktor – korektor formulacija i ne predviđa se iteriranje unutar jednadžbe (4) radi postizanja veće točnosti rješenja. Naravno da je korekcija rješenja potrebna samo kada imamo istjecanje (prelijevanje) i da je značajnija pri većem prelijevanju. Na primjeru sa značajnim prelijevanjem provedena su ispitivanja osjetljivosti na broj iteracija unutar prediktor – korektor postupka pri određivanju visine H i rezultati su prikazani grafički. Slika 2. pokazuje primjer gdje postupak s jednom iteracijom (što je ekvivalentno postupku koji nema programiran postupak iteriranja za dostizanje ravnoteže) daje pogrešno rješenje, a postupak s dva iterativna ciklusa daje rezultat koji je blizak točnom rješenju.



Slika 2. Utjecaj broja iteracija na točnost proračuna

Iz slike 2. razvidno je da je dovoljan broj iteracija tri, ali je pri programiranju na računalu usvojena metode kontrole razlike rezultata (ali nakon najmanje tri iteracije).

Ova je formulacija uspoređena kasnijom s diferencijalnom metodom. Ovdje možemo reći da metoda primjetno ovisi o veličini vremenskog koraka Δt i načinu proračuna srednjih vrijednosti ulaznog dotoka vode.

3 Diferencijalni oblik jednadžbe ravnoteže masa

Diferencijalni oblik jednadžbe ravnoteže masa često se naziva jednadžbom kontinuiteta (*equation of continuity*, vidi [3]) i uobičajeni postupak izvođenja jest razmatranje jednadžbe ravnoteže masa na nekom kontrolnom volumenu, pri čemu je rezultat za nestlačivi fluid kao u našem primjeru $\nabla \mathbf{u} = 0$. Dosljednom primjenom te jednadžbe dolazimo do formulacije problema u kojoj u konačnici zanemarujemo brzinu tečenja vode u rezervoaru (napr. vidi [6]). U našem posebnom slučaju gdje izbjegavamo uvođenje brzine tečenja vode u jednadžbu i kontrolni nam je volumen ukupni sadržaj akumulacije, možemo postupiti drugačije

$$\begin{Bmatrix} brzina \\ prirasta \\ mase \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} brzina \\ ulaza \\ mase \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} brzina \\ izlaza \\ mase \end{Bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} - \frac{dQ_{ulaz}}{dt} + \frac{dQ_{izlaz}}{dt} = 0 \tag{5}$$

Ovo je osnovna diferencijalna jednadžba ravnoteže količine vode u akumulaciji koju treba prilagoditi specifičnom zadavanju podataka preko ulaznog hidrograma i izlaznog preljeva i/ili ispusta i slično.

Kapacitet akumulacije zadaje se tabličnim prikazom ukupnog volumena ovisnim o visini vode u akumulaciji, što možemo prikazati funkcijom ovisnosti volumena o visini vode (ili funkcijom ovisnosti visine o volumenu) $H = f(Q)$.

Uz takvu oznaku imamo

$$\frac{dQ(t,H)}{dt} = f'(H)\frac{dH}{dt} \tag{6}$$

gdje je $f'(H)$ derivacija po visini funkcije ovisnosti volumena o visini punjenja. Izraz $\frac{dQ_{ulaz}(t)}{dt}$ funkcija je vremena t i u hidrologiji rezultat je mjerenja ili se pretpostavlja, a obično se zadaje kao tablica količine koja dotječe u jedinici vremena, te u tom obliku izravno predstavlja veličinu koju trebamo: promjenu dolaznog volumena (mase) u vremenu. Izraz $\frac{dQ_{izlaz}(H)}{dt}$ funkcija je visine vode H i najčešće opisuje neki preljev, temeljni ispust ili slično i zadaje se kao funkcija visine H, pri čemu često postoji neki aktivacijski prag ispod kojeg nema izlaza vode

$$\frac{dQ_{izlaz}(H)}{dt} = \mathrm{H}(H - H_p) \cdot q_{iz}(H - H_p) \tag{7}$$

gdje je H Heavyside funkcija,a H_p visina aktivacijskog praga. Nema nikakvih teškoća da se izlaz vode definira i tablicom koja može biti rezultat mjerenja, a isto se tako može uzeti i da je otjecanje još i u funkciji vremena (npr. kao posljedica otvaranja ili zatvaranja nekog ispusta).

Vidimo da se dosta podataka zadaje u tabličnome obliku, pri čemu neke čak treba i derivirati. Tablične podatke možemo zamijeniti interpolacijskom krivuljom, na primjer kolokacijskim polinomom, preko metode najmanjih kvadrata ili drugim prikladnim postupkom, ali se u ovome radu primjenjuje drugi (jednostavniji) pristup; podaci se ne interpoliraju nego se tablica zamjenjuje nizom (linearno interpolirajućih) pravaca koji nigdje ne postoji kao eksplicitna funkcija nego samo u obliku računalno opisane procedure. Tako zadana računalna procedura može se, međutim, prikazati kao grafikon pa se dobiva iluzija da se rabi neka eksplicitno zadana funkcija. Derivacija tako zadane funkcije se također može opisati kao računalna procedura (koja može dati grafički izlaz). U primjeru su grafički izlazi takvih procedura za opis tablično zadane funkcije i njezine derivacije.

Uzevši u obzir sve navedene pretpostavke, konačni oblik diferencijalne jednadžbe jednodimenzijskog transporta mase jest

$$\frac{dH}{dt} \cdot f'(H) + \mathrm{H}(H - H_p) \cdot q_{iz}(H - H_p) = \frac{dQ_{ulaz}(t)}{dt} \tag{8}$$

Osnovna je nepoznanica u ovome pristupu H, visina vode u akumulaciji, za razliku od integralne formulacije gdje je osnovna nepoznanica količina vode Q ili promjena količine vode ΔQ.

Problem je sada opisan u uobičajenoj matematičkoj formulaciji i uz opisani je tretman tablično zadanih funkcija prikladan za rješavanje cijelim nizom poznatih postupaka za obične diferencijalne jednadžbe. U primjeru koji slijedi upotrijebljen je Eulerov eksplicitni postupak, Heunov postupak kao predstavnik jednokoračnih prediktor-korektor postupaka i postupak Runge-Kutta četvrtog reda kao suvremeni višekoračni postupak (za objašnjenje postupaka numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi, npr. [2]).

Formulacija za Eulerov eksplicitni postupak jest

$$H_{i+1}=\frac{1}{f'(H_i)}\left(\frac{dQ_{ulaz}}{dt}-\mathrm{H}(H_i-H_p)\cdot q_{iz}(H_i-H_p)\right)\Delta t+H_i \tag{9}$$

Heunov postupak uključuje u prvom koraku Eulerov postupak za proračun H_{i+1}, iza kojeg slijedi dodatni korektivni korak

$$H'_{i+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f'(H_{i+1})}\left(\frac{dQ_{ulaz}}{dt}-\mathrm{H}(H_{i+1}-H_p)\cdot q_{iz}(H_{i+1}-H_p)\right)\Delta t+H_{i+1}\right) \tag{10}$$

Primjena postupka Runge-Kutta provodi se u više koraka

$$k_1=\frac{1}{f'(H)}\cdot\frac{dQ(t,H)}{dt}$$

$$k_2=\frac{1}{f'\left(H+\frac{\Delta t}{2}k_1\right)}\cdot\frac{dQ\left(t+\frac{\Delta t}{2},H+\frac{\Delta t}{2}k_1\right)}{dt}$$

$$k_3=\frac{1}{f'\left(H+\frac{\Delta t}{2}k_2\right)}\cdot\frac{dQ\left(t+\frac{\Delta t}{2},H+\frac{\Delta t}{2}k_2\right)}{dt} \tag{11}$$

$$k_4=\frac{1}{f'(H+\Delta t k_3)}\cdot\frac{dQ(t+\Delta t,H+\Delta t k_3)}{dt}$$

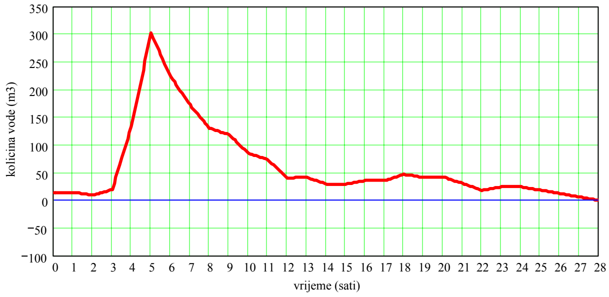
i završni korak

$$H_{i+1}=H_i+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

Formulacija problema diferencijalnom jednadžbom omogućuje primjenu i drugih matematičkih metoda, ali one ovdje neće biti razmatrane.

4 Primjeri

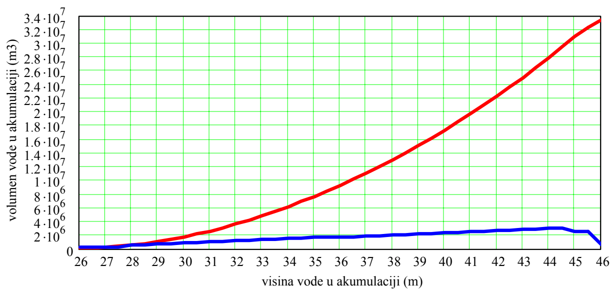
Pretpostavimo da za neku akumulaciju poznajemo funkciju dotoka vode (bilo kao rezultat mjerenja ili računske pretpostavke) i da je grafički prikaz dotoka prema slici 3.



Slika 3. Dotok vode u vremenu

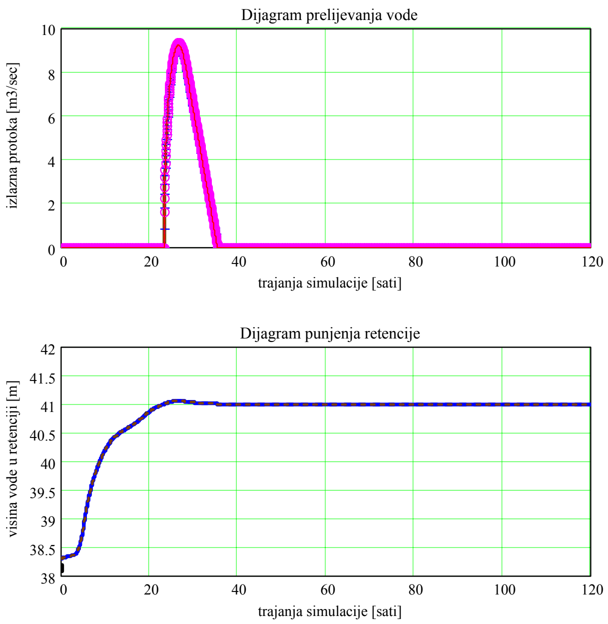
U ovome primjeru pretpostavljamo da voda otječe preko preljeva koji ima prag na koti H_p= 41,0 m i opisuje se uobičajenom funkcijom.

Kapacitet akumulacije neka je također poznat preko funkcije visine vode u odnosu na volumen (dobije se mjerenjem ploština po visini na dobroj karti ili izravno na terenu). Naravno, simulacija može pretpostaviti bilo koju visinu vode u trenutku nailaska vode (u našem primjeru to je H_v = 38,30 m). Za formulaciju diferencijalnom jednadžbom potrebno je definirati izraz $f'(H)$ kojeg nema u integralnoj formulaciji. Taj je izraz derivacija funkcije kapaciteta akumulacije i može se računati numerički kao i svi izrazi u ovome članku. Dakle, nije potrebno iznalaziti interpolacijsku krivulju za bilo koje podatke zadane tablično. Primijenivši numerički postupak, grafički prikaz funkcije volumena akumulacije i derivacije te funkcije dan je na slici 4.



Slika 4. Funkcija volumena akumulacije u ovisnosti o visini i njezina derivacija

Sada smo spremni za postupak rješavanja diferencijalne jednadžbe. Za usporedbu i kontrolu rezultata usvojen je vrlo mali vremenski korak $\Delta t = 3$ min, koji teško da bi se rabio u praksi, no samo za tako mali korak integralnom i diferencijalnom metodom dobivamo usporedive rezultate (slika 5.).



Slika 5. Grafički prikaz rezultata simulacije punjenja akumulacije $\Delta t = 3$ min

Usporedba najvećih vrijednosti dobivenih primjenom raznih metoda prikazana je u tablici 1.

Iz tablice 1. vidljivo je da su vrijednosti slične i možemo pretpostaviti da predstavljaju točnu vrijednost koja će nam biti referencija za proračune s većim vremenskim korakom.

Razlika najvećih vrijednosti rezultata za $\Delta t = 30$ min u postotcima promjene u odnosu na vrijednost za $\Delta t = 3$ min, prikazana je u tablici 2.

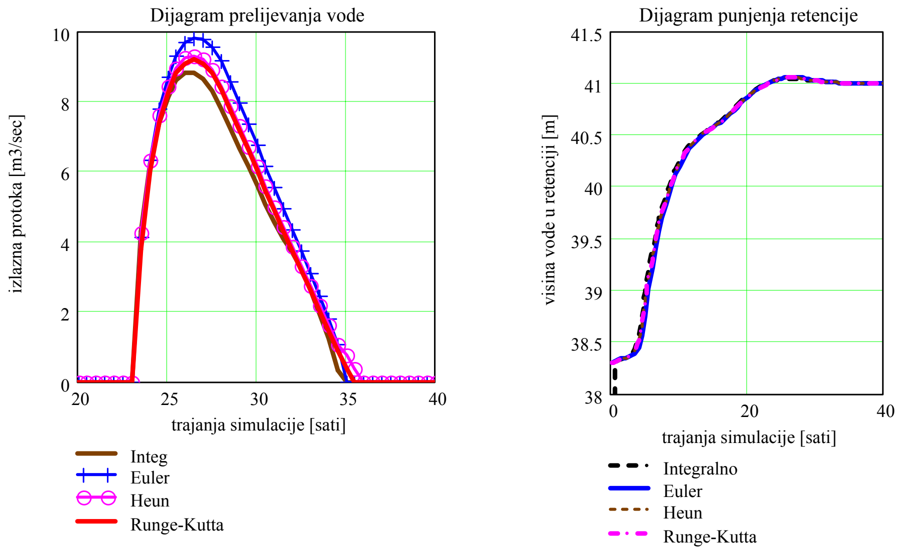
Na slici 6. grafički su prikazani rezultati simulacije punjenja akumulacije za $\Delta t = 30$ min.

Tablica 1. Usporedba najvećih vrijednosti prema raznim metodama $\Delta t = 3$ min

	Formulacija			Postupak
	Integralna	Eulerova	Heunova	Runge-Kutta
Najveća dostignuta visina vode	41,0518 m	41,0533 m	41,0516m	41,0520 m
Najveća količina vode na preljevu	9,209 m^3	9,339 m^3	9,192 m^3	9,223 m^3

Tablica 2. Usporedba najvećih vrijednosti prema raznim metodama $\Delta t = 30$ min

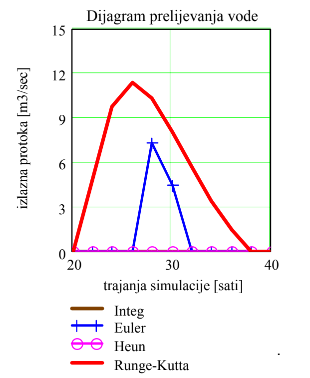
	Formulacija			Postupak
	Integralna	Eulerova	Heunova	Runge-Kutta
Najveća visina vode i razlika prema točnoj vrijed. u %	41,0476 m **0,16%**	41,0587m **-0,24%**	41,0529m **-0,03%**	41,0515 m **0,02%**
Najveća količina na preljevu i razlika prema točnoj vr. u%	8,831 m **4,22%**	9,804 m **-6,33%**	9,309 m **-0,97%**	9,182 m **0,41%**



Slika 6. Grafički prikaz rezultata simulacije punjenja akumulacije $\Delta t = 30$ min

Vidimo da razlike u visinama nisu velike, dok su u maksimalnim protokama nešto veće jer protoka naglo raste svisinom vode; na prvi pogled čini se svejedno koju metodu koristimo (ako zanemarimo da je diferencijalna metoda jednostavnija za primjenu). Daljnja analiza dovela nas je do zanimljivog slučaja koji se pojavljuje za pretpostavku vremenskog koraka $\Delta t = 120$ min. Prihvatljivo rješenje daje samo postupak Runge-Kutta (Eulerov postupak dosta griješi u vremenu aktiviranja preljeva), a integralna formulacija i Heunov postupak uopće ne aktiviraju preljev, što je bitno odstupanje od točnog rezultata.

Tablica 3. Prikazi maksimalno dostignute visine vode za $\Delta t = 120$ min.

	Integralna formulacija H_{max}= 40,951 m Eulerov postupak H_{max}= 41,032 m Heunov postupak H_{max}= 40,958 m Runge-Kutta postupak H_{max}= 41,079 m

Slika 7. Grafički prikaz aktiviranja preljeva za $\Delta t = 120$ min

U čemu je stvar? Problem s jednostavnijim postupcima nastao je zbog toga što smo izabrali korak koji je veći od zadane razlučivosti ulaznih podataka, konkretno dotoka vode. Dobiveni rezultati za relativno veliki vremenski korak vode nas do zaključka da je granična veličina koraka razlučivost ulaznih podataka, tj. korak ne bi smio biti veći od onoga kojim su zadani ulazni podaci. Isto tako, dobro definirani matematički postupci i u tom slučaju daju upotrebljive rezultate pa im treba dati prednost.

5 Zaključak

Prikazane su i uspoređene integralna i diferencijalna metoda određivanja visine vode u akumulaciji s poznatim dotokom vode koji je funkcija vremena i poznatim odtokom vode koji je funkcija visine vode u akumulaciji (i eventualno vremena). Autori nisu u literaturi naišli na primjenu diferencijalne formulacije, pa se postupak naveden u članku smatra doprinosom proračunu istjecanja iz hidrotehničkih akmulacija. Iz riješenih primjera razvidno je da je «nova», diferencijalna formulacija u prednosti glede točnosti i jednostavnosti postupka. Za praktičnu primjenu preporučuje se postupak rješavanja diferencijalnih jednadžbi postupkom Runge-Kutta koji je nešto složeniji, ali i «otporniji» na izbor veličine vremenskog koraka.

LITERATURA

[1] Brower, W. B.: *A Primer in Fluid Mechanics*, CRC Press, 1999.

[2] Chapra, S. C.; Canale, R. P.: *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, 1990.

[3] Hong, C-P.: *Computer Modelling of Heat and Fluid Flow in Materials Processing*, Institute of Physics Publishing, 2004.

[4] Munson, B. R.; Young, D. F.; Okiishi, T. H.: *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Wiley, 2002.

[5] *United States Department of Agriculture*, Part 630 Hydrology National Engineering Handbook, 1997., Chapter 17: Flood Routing, 1967, revised 1972.

[6] Virag, Z.: *Mehanika fluida*, odabrana poglavlja, primjeri i zadaci, Sveučilište u Zagrebu, 2002