

# Dinamička ispitivanja zavješenih i visećih mostova

č

č  
zavješeni most,  
viseći most,  
dinamičko ispitivanje,  
dinamički parametri,  
vlastite frekvencije,  
prigušenje

cable-stay bridge,  
suspension bridge,  
dynamic analysis,  
dynamic parameters,  
eigenfrequencies,  
damping

pont haubané,  
pont suspendu,  
analyse dynamique,  
paramètres dynamiques,  
fréquences propres,  
amortissements

## Ключевые слова

вантовый мост,  
висячий мост,  
динамическое  
испытание,  
динамические  
параметры,  
собственные частоты,  
затухание

Schrägseilbrücke,  
Hängebrücke,  
dynamische  
Untersuchungen,  
dynamische Parameter,  
eigene Frequenzen,  
Dämpfungen

D. Damjanović, Lj. Herceg, I. Duvnjak

Prethodno priopćenje

č  
Dinamička ispitivanja zavješenih i visećih mostova prikazana su na primjerima Mosta Franja Tuđmana u Dubrovniku i pješačkog mosta u Osijeku. Kako je utjecaj dinamičkih djelovanja na zavješene i viseće mostove veći nego na druge tipove mostova veća je i potreba za njihovu eksperimentalnu verifikaciju. Prikazani su rezultati eksperimentalno određenih dinamičkih parametara (vlastitih frekvencija i prigušenja) prikupljenih u različitim vremenskim intervalima te njihove usporedbe.

D. Damjanović, Lj. Herceg, I. Duvnjak

Preliminary note

The dynamic analysis of cable-stay and suspension bridges is presented through case studies of the Franjo Tuđman Bridge in Dubrovnik, and the pedestrian bridge in Osijek. As the impact of dynamic actions on cable-stay and suspension bridges is greater when compared to other bridge types, the need for their experimental verification is also greater. The results of experimentally defined dynamic parameters (eigenfrequency and damping), measured at various time intervals, are presented and compared.

D. Damjanović, Lj. Herceg, I. Duvnjak

Note préliminaire

L'analyse dynamique des ponts haubanés et suspendus est présentée à travers l'étude du Pont de Franjo Tuđman à Dubrovnik, et de la passerelle à Osijek. Étant donné que l'effet des actions dynamiques sur les ponts haubanés et suspendus est plus important si l'on le compare avec les autres types de ponts, la nécessité de leur vérification expérimentale est également plus grande. Les résultats des paramètres dynamiques définis par expérience (fréquences propres et amortissements), mesurés à intervalles différents, sont présentés et comparés.

Д. Дамјановић, Л. Херцег, И. Дувњак

Предварительное сообщение

## Динамичкие испытания вантовых и висячих мостов

Динамичкие испытания вантовых и висячих мостов показаны на примере Моста Франьо Туджмана в г. Дубровнике и пешеходного моста в г. Осиеке. Поскольку динамические воздействия оказывают большее влияние на вантовые и висячие мосты по сравнению с мостами других типов, возникает большая потребность в их экспериментальной верификации. Приведены результаты по экспериментально установленным динамическим параметрам (собственные частоты и затухание), полученным в различных временных интервалах, и произведено их сравнение.

D. Damjanović, Lj. Herceg, I. Duvnjak

Vorherige Mitteilung

Dynamische Untersuchungen von Schrägseil- und Hängebrücken sind an den Beispielen der Brücken "Most Franje Tuđmana" (Franjo Tuđman's Brücke) und Fussgängerbrücke in Osijek dargestellt. Da der Einfluss dynamischer Wirkungen auf Schrägseil- und Hängebrücken ist grösser als auf andere Brückentypen, so ist auch der Bedarf für deren experimentale Verifikation grösser. Dargestellt sind die Ergebnisse von experimentell in verschiedenen Zeitabschnitten angesammelten bestimmten dynamischen Parametern (eigene Frequenzen und Dämpfungen) und deren Vergleich.

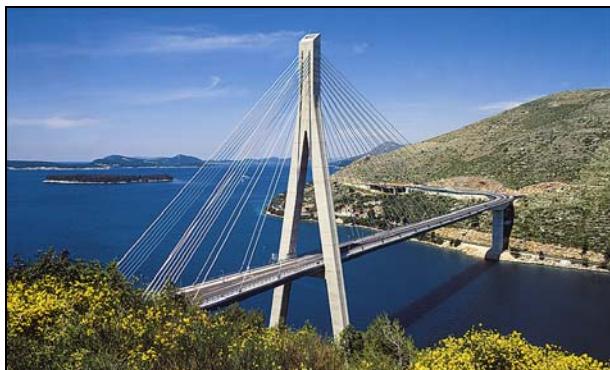
Autori:

č, dipl. ing. građ.; prof. dr. sc.  
dipl. ing. građ., Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb

, dipl. ing. građ.;

,

Konstrukcije zavješenih i visećih mostova svojom konfiguracijom pripadaju posebnim objektima, pa je za poznavanje osnovnih parametara realnog stanja potrebno provesti detaljna eksperimentalna istraživanja. Često se kod takvih konstrukcija događa da iskazivanje parametara stanja samo proračunom ne jamči cijelovit i potpuno pouzdan pristup. Zbog toga se na takvim konstrukcijama provode ispitivanja i prije gradnje na njihovim modelima, zatim stalna ispitivanja tijekom gradnje, provjera ponašanja gotovih konstrukcija te opažanja u određenim vremenskim intervalima tijekom eksploatacije pri izloženosti realnim opterećenjima. Takva organizirana eksperimentalna istraživanja način su za dobivanje dragocjenih podataka potrebnih u održavanju, razvoju i stjecanju spoznaja za projektiranje novih konstrukcija u smislu unapređenja tehničkih normi i propisa, te posebno za pravodobno otkrivanje eventualnih nedostataka. Kadšto se kod takvih konstrukcija pri djelovanju određenih statičkih opterećenja, a još češće pri djelovanju dinamičkih opterećenja, mogu događati i nepredviđene pojave. Posebno se to odnosi na dinamički utjecaj opterećenja vjetrom čija pobuda relativno širokoga frekventnog spektra može izazvati i neželjena stanja ili čak ugrožavati sigurnost.



d

Dinamička ispitivanja zavješenih i visećih mostova prikazat ćemo na primjerima Mosta Franja Tuđmana u Dubrovniku i pješačkog mosta u Osijeku. Kako je utjecaj dinamičkih djelovanja na zavještene i viseće mostove veći nego na druge tipove mostova, veća je i potreba za eksperimentalnom verifikacijom ponašanja tih konstrukcija. Dinamički su parametri (vlastite frekvencije, prigušenja i modalni oblici) funkcije globalne krutosti i najbolji su pokazatelj realnog stanja konstrukcije. Svaka ozbiljnija promjena koja se dogodi na konstrukciji uzrokovat će i promjenu vrijednosti dinamičkih parametara. Objektivno te promjene neće biti velike pa je potrebno postignuti visoku točnost primijenjenih eksperimentalnih metoda [1].

Ispitivanja mosta Franja Tuđmana u Dubrovniku provodila su se u okviru redovnih i specijalističkih pregleda 2005. i 2008. te probnog opterećenja mosta 2002. godine [2, 3, 4]. Redovni i specijalistički pregledi prošireni su na detaljna dinamička ispitivanja mosta kojima je cilj bio utvrditi je li na mostu došlo do oštećenja prilikom pojava vibracija zatega i kolničke konstrukcije, te da li se ugradnjom prigušivača na zategama povećao njihov koeficijent prigušenja.

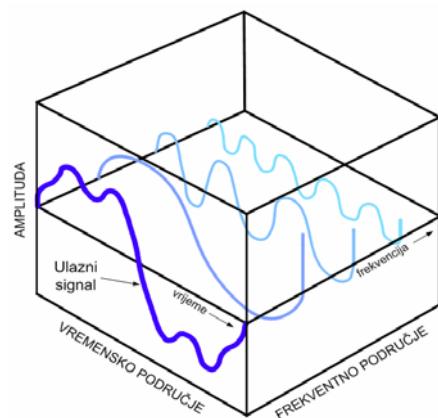


č

Dinamička ispitivanja pješačkog mosta u Osijeku provedena su u ožujku 2009. godine u okviru istražnih radova na mostu. Određene su vlastite frekvencije konstrukcije pri pobudi korisnim opterećenjem i vjetrom, te sile u svim vješljjkama i glavnim zateznim užadima mjerjenjem njihovih vlastitih frekvencija. Rezultati ispitivanja uspoređeni su s rezultatima iz 1993. kada je izvršeno ispitivanje mosta nakon provedene sanacije zbog oštećenja mosta u Domovinskom ratu.

č

Svaki dinamički proces može se prikazati u vremenskom i frekventnom području. Prijelaz iz vremenskog u frekventno područje vrši se Fourierovim transformacijama. FT omogućuje da se svaki fizikalno realan signal može jedinstveno rastaviti u sumu sinusnih i kosinusnih članova odgovarajućih frekvencija.



č

Kod digitalnog prikupljanja podataka mjerjenje se obavlja u konačnom vremenskom periodu  $T$  koji je diskretiziran na  $N$  jednakom raspoređenih vremenskih intervala  $\Delta t$  ( $T = N\Delta t = 1/\Delta f$ ). U tom slučaju govorimo o diskretnoj Fourierovoj transformaciji (DFT) čiji je rezultat kompleksni spektar frekvencija određenog signala koji ima realni i imaginarni dio.

$$DFT \rightarrow S(m\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-i2\pi m\Delta f n\Delta t} \quad (1)$$

$$m = 0, \dots, \left(\frac{N}{2}\right)$$

$$\text{Re}[S(m\Delta f)] = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \cos(2\pi m\Delta f n\Delta t) \quad (2)$$

$$\text{Im}[S(m\Delta f)] = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \sin(2\pi m\Delta f n\Delta t) \quad (3)$$

Realni i imaginarni dio spektra najčešće se preračunavaju u amplitudni i fazni spektar u sljedećem obliku [1]:

$$|X(f)| = \sqrt{\text{Re}[S(f)]^2 + \text{Im}[S(f)]^2} \quad (4)$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\text{Im}[S(f)]}{\text{Re}[S(f)]} \quad (5)$$

Ako odredimo modul spektralne funkcije i kvadriramo dobivenu funkciju dolazimo do funkcije spektralne gustoće snage koja prikazuje energetski doprinos pojedine frekvencije ukupnoj energiji sistema [5].

$$G_{xx}(f) = S_x(f) S_x^*(f) = |S_x(f)|^2 \quad (6)$$

gdje je:

$G_{xx}$  – autospektralna gustoća

$S_x$  – kompleksni spektar funkcije

$S_x^*$  – konjugirano kompleksna funkcija od  $S_x$

U eksperimentalnoj modalnoj analizi često se određuje međuspektralna gustoća odgovora i pobude konstrukcije (gdje je pobuda označena indeksom  $x$ , a odgovor konstrukcije indeksom  $y$ ).

$$G_{yx}(f) = S_y(f) S_x^*(f) \quad (7)$$

gdje je:

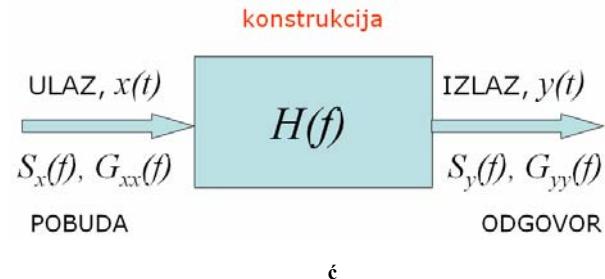
$G_{yx}$  – međuspektralna gustoća

$S_y$  – kompleksni spektar funkcije

$S_x^*$  – konjugirano kompleksna funkcija od  $S_x$

Opći linearni vibrirajući sistem, kako je prikazano na slici 4., sastoji se od funkcije pobude (sila), funkcije odgovora (pomak, brzina ili akceleracija) i prijenosne funk-

cije-  $H(f)$  koja opisuje snagu i fazu odgovora po jedinici sinusne pobude kao funkciju ulazne frekvencije. Konstrukcija svojim karakteristikama predstavljenim krutošću i prigušenjem „filtrira“ ulazni signal pobude. Odgovor konstrukcije općenito pokazuje svojstva apsorpcije određenih komponenata pobude s naglašenim vrijednostima pri frekvencijama bliskim vlastitim frekvencijama.



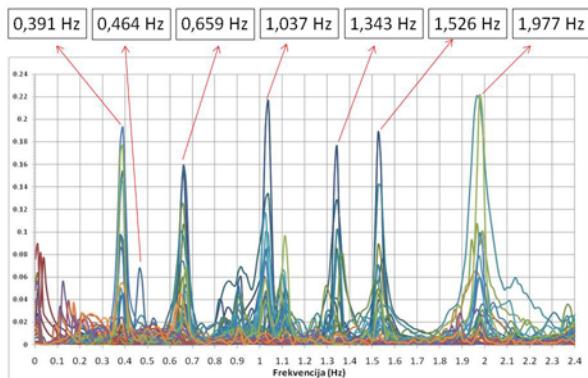
Eksperimentalno određivanje dinamičkih parametara iz prijenosne funkcije daje najtočnije i najpotpunije rezultate, ali kod velikih građevinskih konstrukcija katkad je nemoguće kontrolirano pobuđivati konstrukciju nekom poznatom funkcijom.

U okviru ovog rada obuhvaćena su istraživanja u kojima su dinamički parametri određivani mjerjenjem isključivo odgovora konstrukcije na dinamičku pobudu u vremenskom i frekventnom području. U slučaju da se mjerjenje provodi nakon prestanka djelovanja pobude koja je sadržavala dovoljnu spektralnu širinu, frekvencije primarnih modalnih oblika titranja mogu se odrediti kao vrhovi spektralnih funkcija odgovora konstrukcije, a prigušenja iz pojasa pola snage. Ako konstrukcija slobodno istitava jednim od primarnih modalnih oblika i iz funkcija odgovora konstrukcije u vremenskom području vrlo se lako i s visokom točnošću određuje period odnosno frekvencija, ali i logaritamski dekrement prigušenja.

### 3.1 Vlastite frekvencije rasponskog sklopa

Dinamička mjerena provedena su pomoću akcelerometara, integratora signala, analogno-digitalnog konvertera te prijenosnog računala s odgovarajućim aplikacijama za brzu Fourierovu transformaciju (FFT).

Mjerena su provedena na više karakterističnih mesta konstrukcije. Kao pobuda upotrijebljen je teški kamion mase oko 30,0 t, koji se kretao preko mosta različitim brzinama. Ova vrsta pobude sastoji se od kratkih impulsnih udara, različitih intenziteta i frekventnih opsega, koji sumarno čine funkciju pobude slučajnog (stohastičkog) karaktera srednje širokoga frekventnog spektra.



Vlastite frekvencije rasponskog sklopa određene su iz funkcija amplitudnog spektra i funkcija spektralne gustoće snage. Navedene funkcije određene su na licu mjesta FFT analizom u realnom vremenu i naknadnom FFT analizom prikupljenih podataka u vremenskom području [6, 7, 8]. Zapisi amplitudnih spektralnih funkcija iz kojih su određene vlastite frekvencije rasponskog sklopa prikazane su na slici 5.

Tablica 1. Izmjerene i teorijske vrijednosti frekvencija rasponskog sklopa

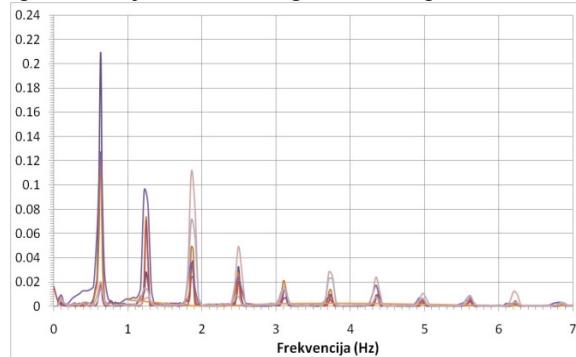
Izmjerene frekvencije (Hz)			Teorijske frekvencije (Hz)
2008. godine	2005. godine	2002. godine	
0,391	0,373	0,368	0,359
0,464	0,465	0,497	0,401
0,659	0,651	0,652	0,646
0,915	0,933	0,923	0,968
1,037	1,024	1,007	1,014
1,343	1,302	1,310	1,374
1,526	-	-	-
1,977	2,049	2,059	2,075

U tablici 1. prikazane su izmjerene frekvencije rasponskog sklopa mjerene tijekom redovnih i specijalističkih pregleda 2008. i 2005. godine te prilikom probnog opterećenja mosta 2002. i uspoređene su s prije određenim

vlastitim frekvencijama, kao i s teorijskim vrijednostima vlastitih frekvencija. Odstupanja izmjerenih vlastitih frekvencija nalaze se u granicama točnosti mjerena.

### 3.2 Vlastite frekvencije, prigušenja i sile u zategama

Svaka od 38 zatega pobuđena je ručno, čeličnim užetom. Vibracije su mjerene akcelerometrom pričvršćenim na površinu zatege pri slobodnom istitravanju. Prvih 5 vlastitih frekvencija svake zatege određeno je iz funkcija amplitudnog spektra i funkcija spektralne gustoće snage [9]. Na slici 6. prikazani su zapisi funkcija amplitudnog spektra izmjerenih na zategi br. 1 sa zapadne strane.

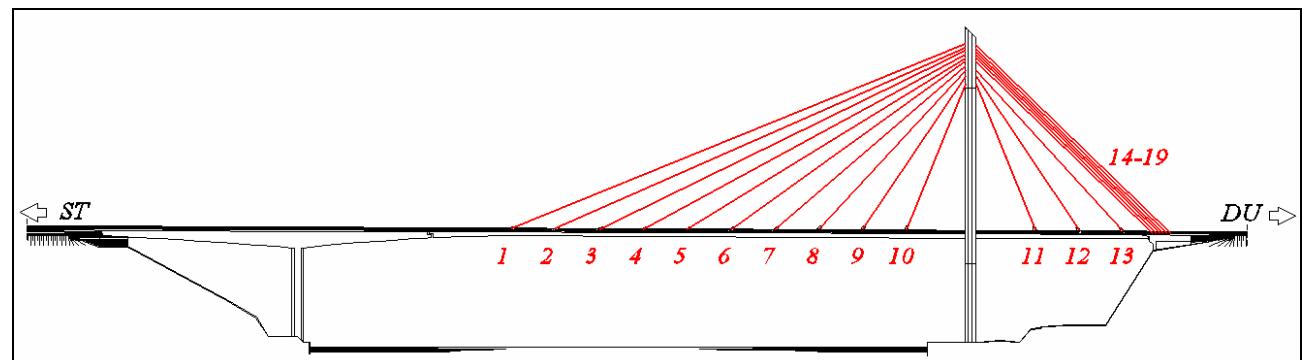


Koeficijenti prigušenja zatega za prvu frekvenciju određeni su preko logaritamskog dekrementa, analizom vremenskog zapisa slobodnog istitravanja svake od zatega, prema izrazima (8) i (9).

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi} \quad (8)$$

$$\delta = \frac{1}{n-1} \ln \frac{v_1}{v_n} \quad (9)$$

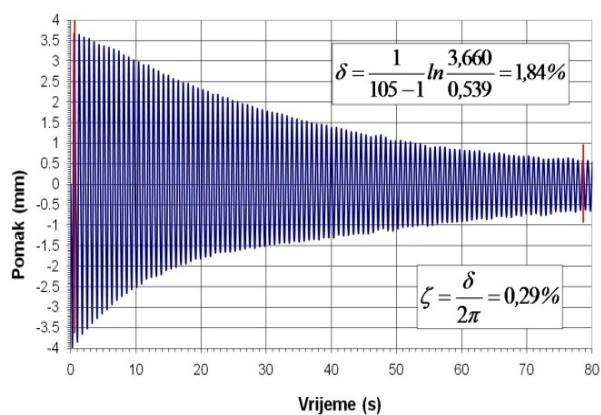
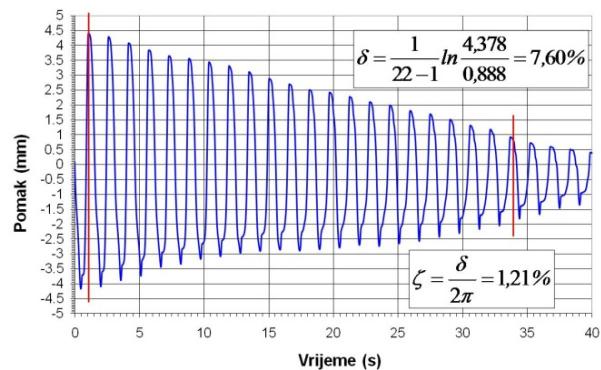
Vremenski zapisi istitravanja zatege br. 1 na istočnoj strani i zatege 8 na zapadnoj strani prikazane su na slikama 8. i 9. Rezultati prigušenja pokazuju da zatega na koje su ugrađeni prigušivači imaju nekoliko puta veći koeficijent prigušenja od onih na koje nije ugrađen pri-



gušivač (zatege 7-10). Prigušenja zatega 1-6 prije ugradnje prigušivača određena su 2005. godine i bila su ispod 0,2 %, a rezultati prigušenja istih tih zatega nakon ugradnje prigušivača kreću se između 1,2-1,7 %. U tablici 2. prikazane su vrijednosti eksperimentalno određenih prvih 5 vlastitih frekvencija i prigušenja za prvi oblik titranja.

Tablica 2. Frekvencije i prigušenja zatega (2008.)

Zatega	1. ton		2. ton	3. ton	4. ton	5. ton
	frek. (Hz)	prig. (%)	frek. (Hz)	frek. (Hz)	frek. (Hz)	frek. (Hz)
1I	0,64	1,21	1,29	1,93	2,56	3,25
1Z	0,64		1,25	1,86	2,49	3,13
2 I	0,61	1,73	1,22	1,86	2,44	3,08
2Z	0,64		1,25	1,88	2,49	3,13
3 I	0,68	1,57	1,34	2,03	2,71	3,39
3Z	0,68		1,34	2,05	2,73	3,39
4 I	0,73	1,59	1,47	2,20	2,93	3,61
4Z	0,71		1,47	2,20	2,93	3,66
5 I	0,78	1,60	1,56	2,34	3,13	3,91
5Z	0,81		1,59	2,39	3,15	3,98
6 I	0,95	1,24	1,90	2,86	3,81	4,79
6Z	0,95		1,88	2,83	3,78	4,74
7 I	1,09	0,33	2,16	3,24	4,36	5,45
7Z	1,07		2,14	3,17	4,29	5,37
8 I	1,32	0,29	2,61	3,93	5,24	6,55
8Z	1,32		2,64	3,93	5,26	6,60
9 I	1,41	0,32	2,82	4,23	5,63	7,04
9Z	1,43		2,86	4,29	5,68	7,14
10I	1,66	0,32	3,32	4,96	6,63	8,29
10Z	1,66		3,31	4,99	6,60	8,25
11I	1,81	1,59	3,56	5,37	7,13	8,98
11Z	1,78		3,56	5,35	7,15	8,94
12I	1,56	1,39	3,13	4,69	6,25	7,81
12Z	1,51		2,93	4,49	5,91	7,47
13I	1,22	1,07	2,39	3,64	4,83	6,08
13Z	1,25		2,47	3,71	4,96	6,20
14I	1,21	-	2,42	3,64	4,85	6,07
14Z	1,22		2,43	3,65	4,92	6,13
15I	1,17	-	2,32	3,52	4,66	6,02
15Z	1,23		2,44	3,66	4,90	6,12
16I	1,22	-	2,42	3,64	4,85	6,04
16Z	1,23		2,45	3,70	4,93	6,15
17I	1,21	-	2,42	3,66	4,87	6,08
17Z	1,23		2,44	3,66	4,90	6,10
18I	1,21	-	2,42	3,63	4,82	6,07
18Z	1,23		2,44	3,66	4,90	6,12
19I	1,21	-	2,42	3,64	4,86	6,06
19Z	1,22		2,43	3,64	4,87	6,06



Eksperimentalno određene vlastite frekvencije iskorištene su za određivanje sila u zategama.

Sile u zategama određene su na bazi teorije titranja žice, prema izrazu (10), s pomoću prvih pet određenih frekvencija. Za zatege 14-19 dužina zatege (L) reducirana je za dužinu od mesta sidrenja na upornjaku do mesta pričvršćenja na prigušivač jer su te zatega međusobno kruto povezane.

Na slici 10. grafički su prikazane vrijednosti eksperimentalno određenih sila u zategama iz 2005. i 2008. godine te vrijednosti sila u zategama iz protokola o prednapinjanju.

$$F = \frac{4m \cdot \sum f_n^2 \cdot L^2}{\sum n^2} \quad (10)$$

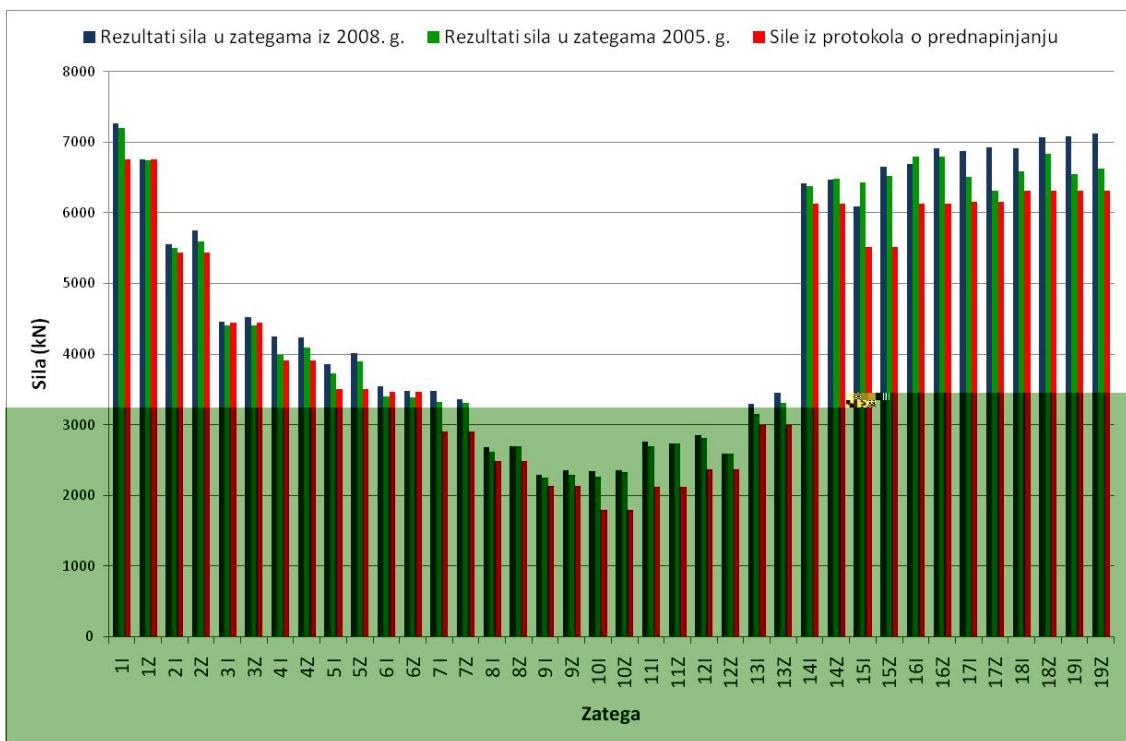
gdje je:

$F$  – sila u zategi

$m$  – masa po jedinici dužine

$f_n$  –  $n$ -ta vlastita frekvencija

$L$  – dužina zatege.



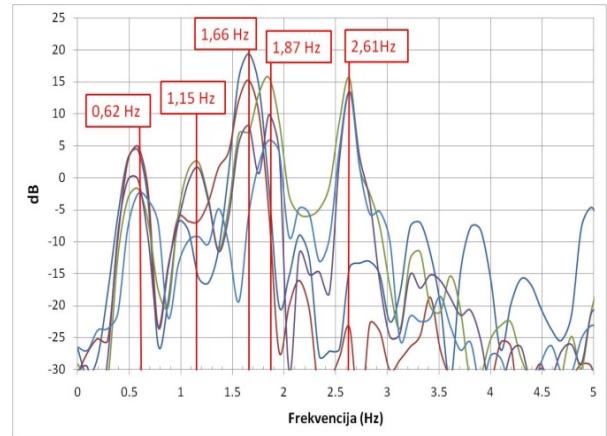
#### 4.1 Vlastite frekvencije rasponskog sklopa

Dinamičko ispitivanje rasponske konstrukcije mosta provedeno je pri pobudi korisnim opterećenjem (pješacima) te pri horizontalnoj pobudi vjetrom (brzina vjetra 8 – 12 m / s) [10], [11].

Tablica 3. Vlastite frekvencije rasponske konstrukcije

Lokacija mjerjenja	Izmjerene vlastite frekvencije 2009. g. (Hz)	Izmjerene vlastite frekvencije 1993. g. (Hz)
L/2 i L/4	0,62	0,68
L/2 i L/4	1,15	1,18
L/2	1,66	1,62
L/2 i L/4	1,87	1,81
L/2	2,61	-

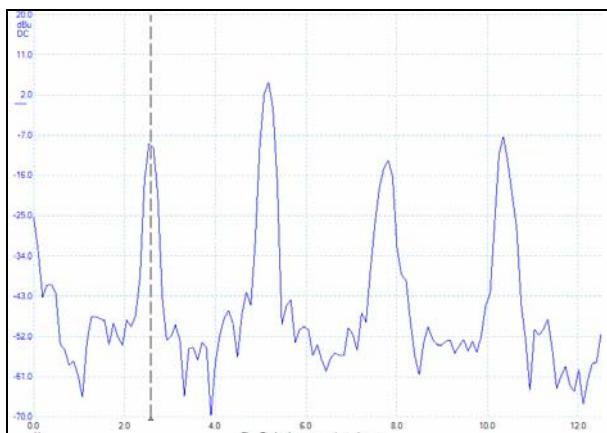
Registracija dinamičkog odgovora konstrukcije izvršena je u vremenskoj i frekventnoj domeni preko akcelerometara, integratora signala, analogno-digitalnog konvertora te prijenosnog računala s odgovarajućim aplikacijama za FFT analizu. Zapisi funkcija spektralne gustoće snage iz kojih su određene vlastite frekvencije prikazane su na slici 11. Rezultati i usporedba s izmjerenim frekvencijama iz 1993. prikazani su u tablici 3.



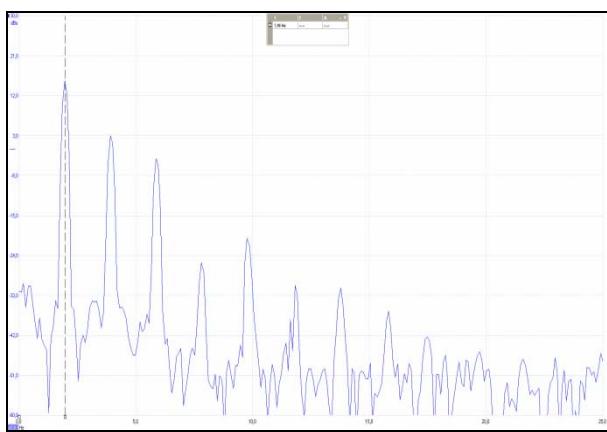
#### 4.2 Sile u vješalkama

Ispitivanje veličine sila u vješalkama provedeno je rezonantnom dinamičkom metodom, mjeranjem vlastitih frekvencija poprečnog titranja vješalki. Veličina sila u vješalkama određena je na osnovi korelacije vlastite frekvencije titranja i naprezanja prema izrazu (10).

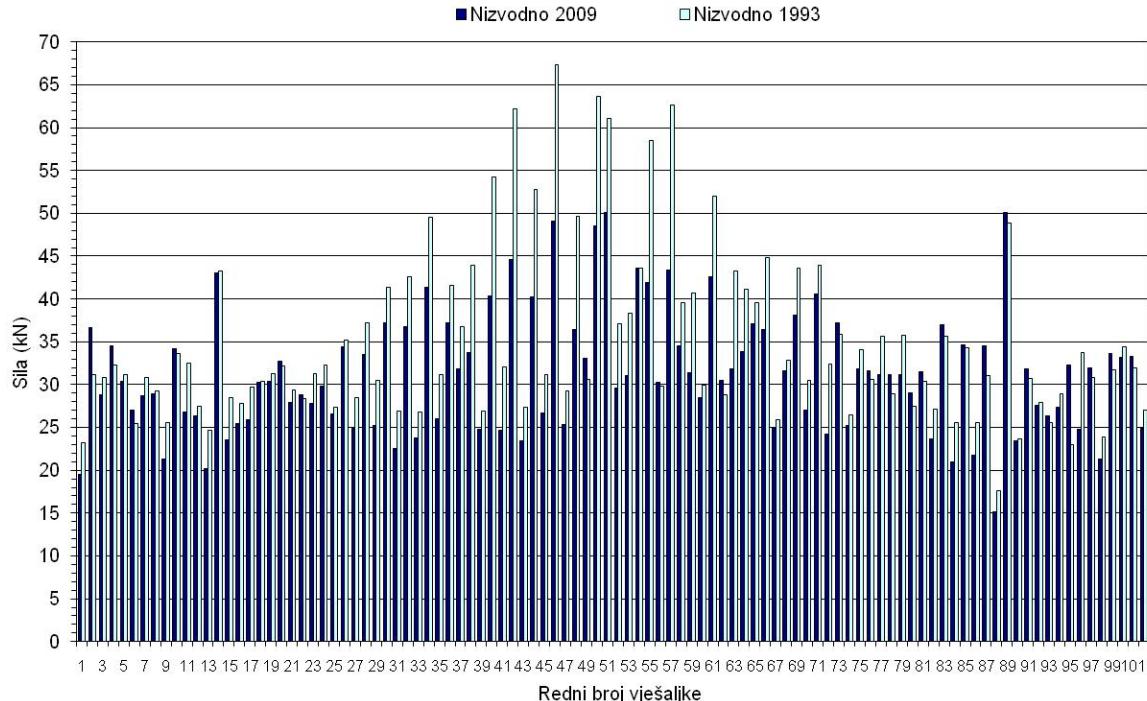
Registracija dinamičkog odgovora na svakoj vješaljci (ukupan broj  $2 \cdot 102 = 204$ ) izvršena je pomoću akcelometra pričvršćenog na vješaljku. Vlastite su frekvencije određene iz zapisa funkcija spektralne gustoće snage, karakterističan zapis prikazan je na slici 12.

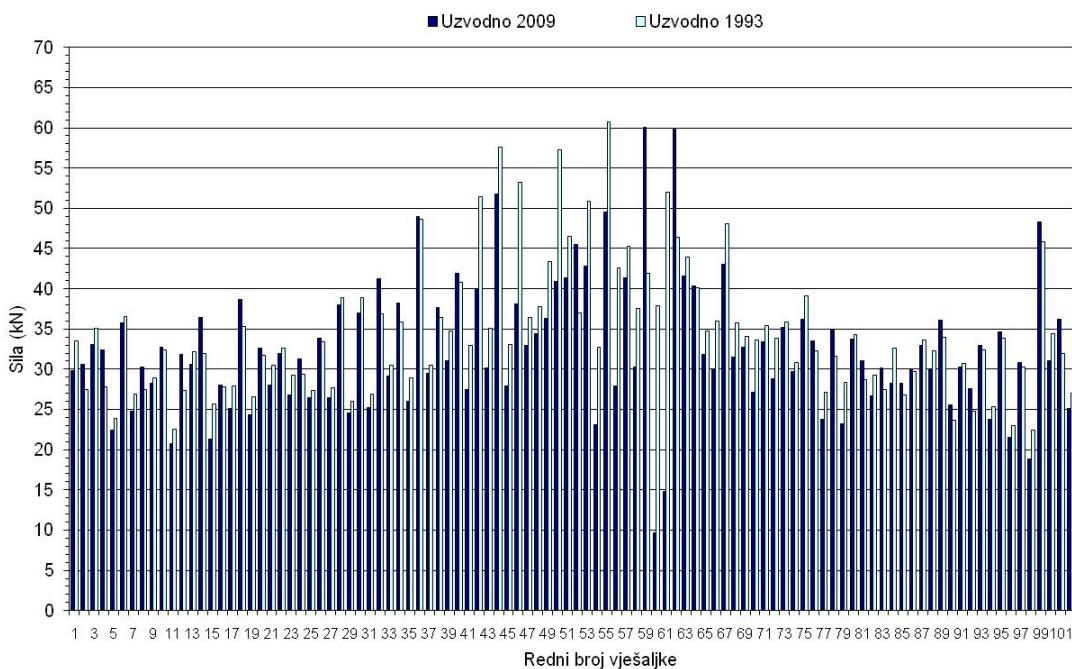


č



č





Tablica 4. Sile u glavnim zateznim užadima

Glavna zatezna užad	Frek. (Hz)	F (kN)	F <sub>rac</sub> (kN)
Desna obala – nizvodno	1,98	5187 (93%)	
Desna obala – uzvodno	2,00	5293 (95%)	
Lijeva obala – nizvodno	2,05	5560 (99%)	
Lijeva obala – uzvodno	2,05	5560 (99%)	

č

Prikazani primjeri eksperimentalnih istraživanja upućuju na potrebu dinamičkih ispitivanja konstrukcija u od-

- [1] Herceg, Lj.: *Ocjena realnog stanja konstrukcija određivanjem dinamičkih parametara*, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, doktorska disertacija, Zagreb, 1993.
- [2] Rak, M.; Damjanović, D.: *Izvješće o redovnom i specijalističkom pregledu Mosta Dubrovnik*, Zavod za tehničku mehaniku, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2005.
- [3] Rak, M.; Damjanović, D.: *Izvješće o dinamičkim ispitivanjima u okviru redovnog i specijalističkog pregleda Mosta Dubrovnik*, Zavod za tehničku mehaniku, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2008.
- [4] Rak, M.; Krolo, J.; Čalogović, V.: *Izvješće o ispitivanju Mosta Dubrovnik*, Zavod za tehničku mehaniku, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2002.
- [5] Harris, M. C.: *Shock and Vibration Handbook*, Fourth Edition, New York, McGraw-Hill, 1996.
- [6] Rak, M.; Krolo, J.; Šavor, Z.; Herceg, Lj.; Damjanović, D.: *Modal analysis of the Dubrovnik bridge*, Proceedings of the International Conference on Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, Paris, 2005., 87.-92.
- [7] Kapović, Z.; Rak, M.; Damjanović, D.: *Experiences and some results in experimental testing of bridges in Croatia*, Proceedings of Fifth International Conference on Current and Future Trends in Bridge Design, Construction and Maintenance, Peking 2007., 163.-173.
- [8] Rak, M.; Herceg, Lj.; Lazarević, D.; Čalogović, V.; Damjanović, D.: *Dynamic Testing of the Dubrovnik Bridge*, International Conference Bridges: Proceedings, Zagreb: Secon HDGK, 2006., 1059.-1066.
- [9] Rak, M.; Damjanović, D.; Biočić, Z.: *Experimental Analysis of Vibrations of the Dubrovnik Bridge*, Seventh International Symposium on Cable Dynamics – Proceedings, Beč, 2007., 393.-400.
- [10] Herceg, Lj.; Damjanović, D.; Duvnjak I.: *Izvješće o istražnim radovima i stanju konstrukcije pješačkog mosta preko rijeke Drave u Osijeku*, Zavod za tehničku mehaniku, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2009.
- [11] Duvnjak, I.; Damjanović, D.; Herceg, Lj.: *The inspection of the pedestrian bridge over the river Drava in Osijek conducted by dynamic investigation*, 26th Symposium on Advances in Experimental Mechanics, Institute of Mechanical Engineering, Leoben, 2009., 49.-50.