Primljen / Received: 24.9.2014.
Ispravljen / Corrected: 17.2.2015.
Prihvaćen / Accepted: 31.3.2015.
Dostupno online / Available online: 10.7.2015.

Sektorski element za analizu debelih cijevi izloženih unutarnjem tlaku i promjeni temperature

Autori:

Mr.sc. Asma Bouzriba, dipl.ing.građ.
Sveučilište Bejaïa u Alžiru
Građevinski fakultet
asmatfk@gmail.com

Prof.dr.sc. Cherif Bouzrira, dipl.ing.građ.
Sveučilište Jijel u Alžiru
Građevinski fakultet
c_bouzrira@yahoo.fr

Prethodno priopćenje

Asma Bouzriba, Cherif Bouzrira

Sektorski element za analizu debelih cijevi izloženih unutarnjem tlaku i promjeni temperature

U radu je primijenjen deformacijski pristup za razvoj sektorskog ravninskog konačnog elementa definiranog u polarnom koordinatnom sustavu. Element se koristi za određivanje ravninskog stanja u području elastičnosti. Razvijeni element ima tri stupnja slobode u svakom čvoru. Ponašanje ovog elementa ispitano je kroz analizu debelih cijevi izloženih unutarnjem tlaku i promjeni temperature. Utvrđena je efikasnost elementa i pokazano je da se primjenom ovog elementa postiže brža konvergencija rješenja pri izračunavanju naprezanja i pomaka nego u slučaju primjene drugih elemenata.

Ključne riječi:
sektorski element, rotacija u ravnini, pomaci krutih tijela, ravninsko stanje, elastičnost, temperatura

Preliminary report

Asma Bouzriba, Cherif Bouzrira

Sector element for analysis of thick cylinders exposed to internal pressure and change of temperature

The strain-based approach for development of a sector in-plane finite element defined in the polar coordinate system is applied in the paper. The element is used for determining the plane state in elastic area. The developed element has three degrees of freedom in each node. The performance of this element was tested through analysis of thick cylinders exposed to internal pressure and change of temperature. The efficiency of the element was established, and the convergence of results for stresses and displacements of this element was shown to be faster compared to other elements.

Key words:
sector element, in-plane rotation, rigid body displacements, plane state, elasticity, temperature

Vorherige Mitteilung

Asma Bouzriba, Cherif Bouzrira

Sektorelement zur Analyse starker Rohre unter Innendruck und Temperaturveränderung

In dieser Arbeit wird das Verformungsverfahren angewandt, um ein in Polarkoordinaten definiertes finites Sektorelement zur Analyse in der Ebene im elastischen Bereich zu entwickeln. Das eingeführte Element hat drei Freiheitsgrade in jedem Knotenpunkt. Das Verhalten des Elements wurde durch Analysen starker Rohre unter Innendruck und Temperaturveränderung erfragt. Die Effizienz des Elements konnte festgestellt werden und bei seiner Anwendung wurde eine schnellere Lösungskonvergenz bei der Berechnung von Spannungen und Verschiebungen erzielt, als bei dem Einsatz anderer Elemente.

Schlüsselwörter:
Sektorelement, Rotation in der Ebene, Verschiebung von Starrkörpern, Zustand in der Ebene, Elastizität, Temperatur

1. Uvod

U literaturi se u novije vrijeme spominje pristup utemeljen na deformaciji [1-3] i to u vezi s razvojem novih konačnih elemenata u kojima se polje pomaka može dobiti integriranjem deformacije. Za probleme ravninskog stanja naprezanja najjednostavniji oblici elemenata su očito trokut i pravokutnik s tri tj. četiri čvora. Međutim, kod problema sa zakrivljenim granicama, primjena trokutastog elementa znači da se zakrivljena granica određuje aproksimativno pomoću serije ravnih dijelova. Osim toga, kako se u današnje vrijeme sve više razvijaju vrlo sofisticirani elementi, greška koja se uvodi u ovu aproksimaciju može biti ograničavajući faktor u nekim rješenjima. Stoga se napori koji se ulažu radi iznalaženja elementa sa zakrivljenim granicama smatraju opravdanima. Prvi takav pokušaj pripisuje se Ergatoudisu i dr. [4] koji su uveli izoperimetrijski pristup. Međutim, kod problema s kružnim granicama pogodno je korištenje sektorskog elementa koji se definira u polarnom koordinatnom sustavu. Raju i Rao [5] razvili su sektorski element koji ima samo osnovne stupnjeve slobode i to primjenom polinomnih izraza za polje pomaka. U novije vrijeme, Sabi i dr. [6, 8] i Bouzrira i dr. [9] primjenjuju deformacijski pristup za razvoj sektorskog elementa sa dva i tri stupnja slobode po čvoru.

U ovom se radu primjenjuje pristup baziran na deformacijama u svrhu razvoja novog sektorskog elementa, definiranog u polarnom koordinatnom sustavu, koji ima dva translacijska stupnja slobode i rotaciju u ravnini. Element se najprije ispituje za slučaj savijanja zakrivljenog štapa. Kada rezultati pokažu učinkovitost, taj se element koristi u analizi debele cijevi izložene unutarnjem tlaku i promjeni temperature. Takva analiza debelih cijevi izloženih promjeni temperature do sada nije primijenjena.

2. Derivacija funkcije pomaka za sektorski element

Kod ravninskih problema u području elastičnosti relativne deformacije, u polarnom koordinatnom sustavu r i θ definirani su izrazima:

$$\varepsilon_r = \partial u / \partial r \tag{1.a}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\partial v / \partial\theta + u / r \tag{1.b}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\partial u / \partial\theta + \partial v / \partial r - v / r \tag{1.c}$$

gdje su: ε_r, ε_θ i $\gamma_{r\theta}$ normalne i posmične deformacije, dok su u i v pomaci u smjerovima r i θ.

Ako se te tri deformacije izjednače s nulom, mogu se integrirati rezultirajuće tri diferencijalne jednadžbe da bi se dobili izrazi polja pomaka koje odgovara pomaku krutog tijela. Imamo dakle:

$$u_R = \cos\theta\ a_1 + \sin\theta\ a_2 \tag{2. a}$$

$$v_R = -\sin\theta\ a_1 + \cos\theta\ a_2 + r\,a_3 \tag{2. b}$$

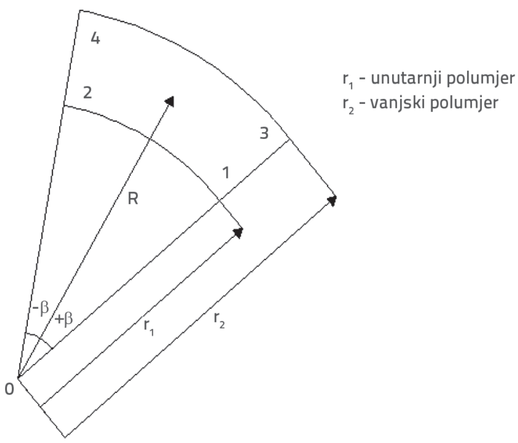
gdje konstante a_1 i a_2 predstavljaju translacijske pomake krutog tijela u smjerovima r i θ, dok a_3 predstavlja rotaciju u ravnini.

$$\varphi = 1/2\left(-\frac{1}{r}\partial u/\partial\theta + \partial v/\partial r + v/r\right) \tag{3}$$

Iz toga proizlazi:

$$\phi_R = a_3 \tag{4}$$

Funkcija pomaka ovog sektorskog elementa treba sadržavati dvanaest neovisnih konstanti. Tri su konstante potrebne radi predstavljanja pomaka krutog tijela. Preostalih devet konstanti služe za izražavanje pomaka uslijed deformiranja elementa.



Slika 1. Sektorski element definiran u polarnim koordinatama

Iz toga slijedi:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = a_4 + 2\,r\,a_6 + \theta\,a_{10} + 3\,r^2\,a_{11} \\ \varepsilon_\theta = a_5 + r\,a_6 - \dfrac{\theta r^3}{3}a_8 + \theta a_9 + r^2\,a_{11} \\ \gamma_{r\theta} = a_7 + \dfrac{\theta}{r}a_6 - \dfrac{r^3\theta^2}{2}a_8 + \dfrac{\theta}{r}a_{10} - 2ra_{12} \end{cases} \tag{5}$$

Deformacije iskazane u jednadžbama (5) udovoljavaju uvjetima jednadžbe kompatibilnosti:

$$\frac{\partial^2\gamma_{r\theta}}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial^2\theta} - r\frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial^2 r} - 2\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_{r\theta}}{\partial\theta} = 0 \tag{6}$$

Uvrštavajući jednadžbe (5) u jednadžbu (1) te integrirajući dobivene diferencijalne jednadžbe, funkcije pomaka se mogu izraziti kao:

$$u_s = r\,a_4 + (1 + r^2)a_6 + (1 + \theta r)a_{10} + r^3 a_{11} \tag{7. a}$$

$$v_s = -r\theta a_4 + r\theta\,a_5 - \theta a_6 - \frac{r^4\theta^2}{6}a_8 + \frac{r\theta^2}{2}a_9 - \left(\frac{r\theta^2}{2} + \theta\right)a_{10} - r\log(r)(a_{10} - a_7) - 2r^2 a_{12} \tag{7. b}$$

$$\phi_s = -\theta a_4 + \theta a_5 - \frac{\theta}{2r} a_6 + \left(\frac{1}{2} + \log(r)\right) a_7 - \frac{5r^3\theta^2}{12} a_8 + \frac{\theta^2}{2} a_9 - \left(1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta}{2r} + \log(r)\right) a_{10} - 3r a_{12} \quad (7.\ c)$$

Funkcije konačnog pomaka dobivaju se uvrštavanjem odgovarajućih izraza za u, v i ϕ iz jednadžbi (2) i (4) u jednadžbe (7). Vektor pomaka čvora može se iskazati u obliku matrice:

$$\{u_i\} = [C]\{A\} \quad (8)$$

gdje je {A} vektor konstantnih parametara, a [C] je transformacijska matrica iskazana u Prilogu ovog rada.

$$\left[K^e\right] = \left[C^{-1}\right]^T \left[\iint [B]^T [D][B]\, r\, dr\, d\theta\right]\left[C^{-1}\right] = \left[C^{-1}\right]^T [K_0]\left[C^{-1}\right] \quad (9)$$

gdje je [D] matrica elastičnih konstanti, a [B] je matrica deformacije.

$$\iint dr\, d\theta = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \det[J]\, d\zeta\, d\eta \quad (10)$$

$$\left[K^e\right] = \left[C^{-1}\right]^T \left[\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} r[B]^T [D][B] \det|J|\, d\zeta\, d\eta\right]\left[C^{-1}\right] \quad (11)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2r & 0 & 0 & 0 & \theta & 3r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 & -\frac{\theta r^3}{3} & \theta & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta}{r} & 1 & -\frac{\theta^2 r^3}{2} & 0 & \frac{\theta}{r} & 0 & -2r \end{bmatrix} \quad (12)$$

3. Termoelastičnost

Za dvodimenzionalan problem, konstitutivni zakon termoelastičnosti izotropnog materijala može se iskazati kako slijedi:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = [D]\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} - [D_1]\,\alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

gdje je:
T - temperaturni gradijent
a - koeficijent toplinskog širenja.

$$[D_1] = \frac{E}{1-v}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = [B][C]^{-1}\{U_i\} \quad (15)$$

Čvorna sila zbog temperaturnog gradijenta iskazuje se kako slijedi:

$$\{F\} = \left[C^{-1}\right]^T \iint [B]^T [D_1]\,\alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} r\, dr\, d\theta = \left[C^{-1}\right]^T \left[\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} r[B]^T [D_1]\,\alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \det|J|\, d\xi\, d\eta\right] \quad (16)$$

Kod jednolikog toka, ako je T_i temperatura na unutarnjoj površini cijevi dok je temperatura na vanjskoj površini nula, tada se temperatura T na svakoj udaljenosti r od centra može predstaviti pomoću izraza [10]:

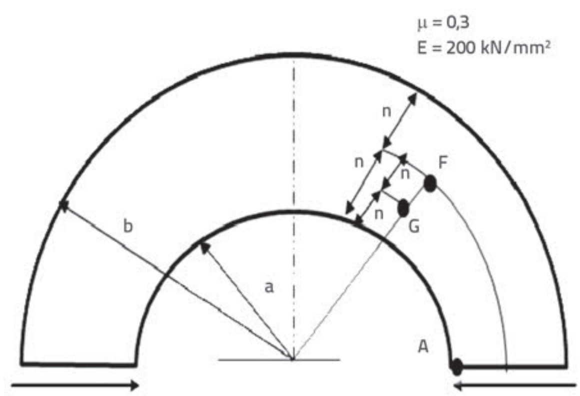
$$T = \frac{T_i}{\log(b/a)} \log(b/r) \quad (17)$$

4. Numerička validacija

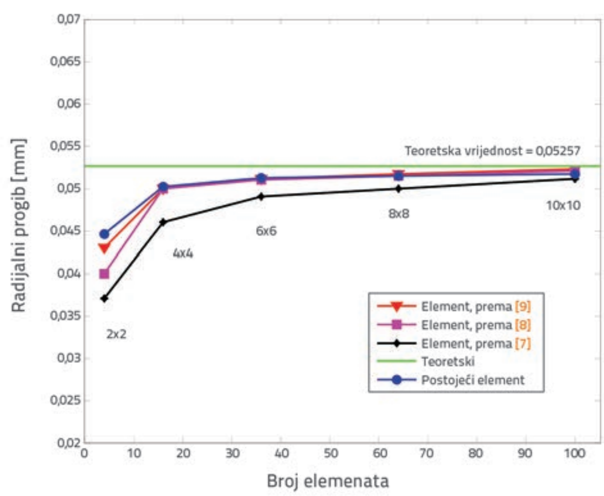
Da bi se provjerila razina točnosti i računske učinkovitosti postignuta pomoću razvijenog elementa, prikazat će se nekoliko različitih primjera koji se odnose na ravninske probleme u području elastičnosti.

4.1. Savijanje zakrivljenog štapa nanošenjem sile na kraju

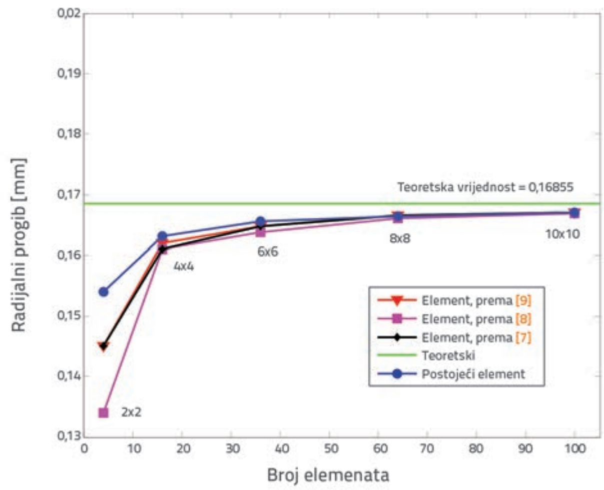
Prvi primjer je dvodimenzionalni problem u području elastičnosti zakrivljenog štapa izloženog djelovanju dviju sila kao što se to vidi na slici 2. Za detaljnu analizu rezultata razmatra se širok raspon odnosa b/a. Zbog simetrije, analizira se samo polovica zakrivljenog štapa te se rezultati uspoređuju s onima iz literature [7-9], isto kao i s rješenjem u području elastičnosti koje predlaže Timoshenko [10].



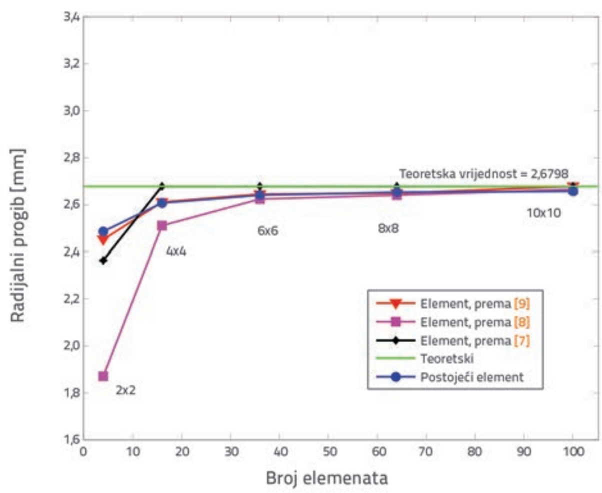
Slika 2. Zakrivljeni štap izložen radijalnom opterećenju



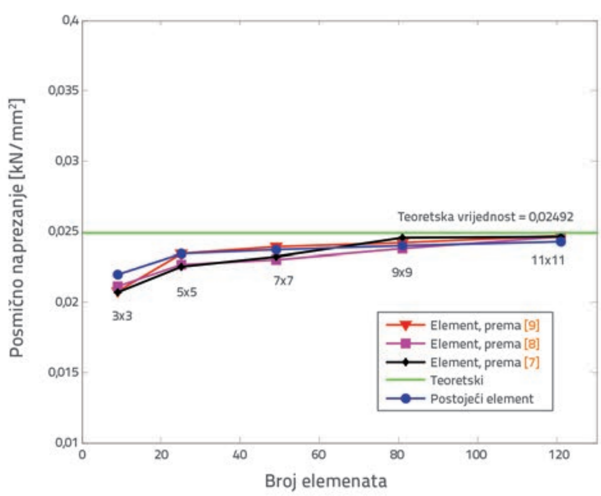
Slika 3. Konvergencija pomaka u_A za primjenu različitih elemenata (b/a=3)



Slika 4. Konvergencija pomaka u_A za primjenu različitih elemenata (b/a=2)



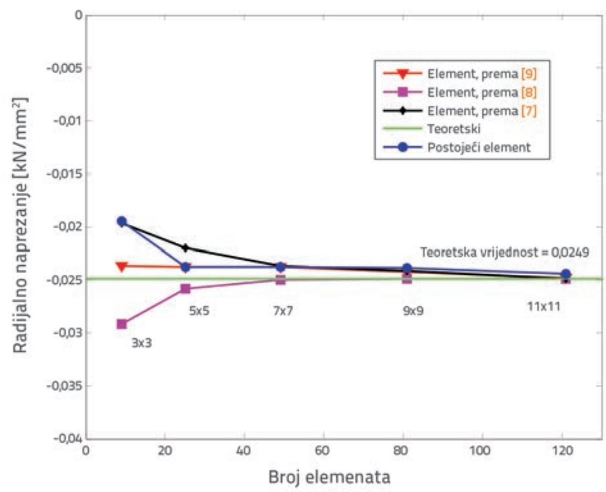
Slika 5. Konvergencija pomaka u_A za primjenu različitih elemenata (b/a=1.3)



Slika 6. Konvergencija posmičnog naprezanja $\tau_{r\theta}$ u "F"

Na slikama 3., 4. i 5. dijagramom su prikazane konvergencije rezultata za progib u "A" (slika 2.) analiziran za odnose b/a = 3, 2 i 1,3. Kao što se vidi, primjenom ovih elemenata dobiju se bolji rezultati nego primjenom drugih elemenata.

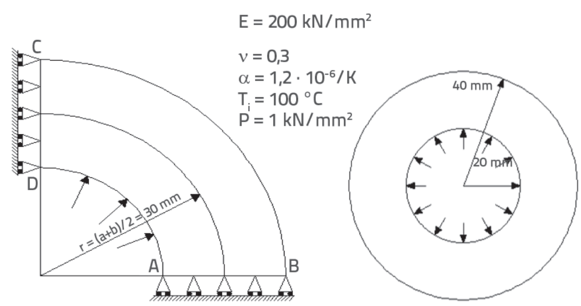
Slike 6. i 7. prikazuju konvergencijske krivulje za posmična i radijalna naprezanja u točki "F" (slika 2.) za odnos b/a = 2. Utvrđeno je da se ovim elementom dobivaju bolji rezultati radijalnog naprezanja nego primjenom grube mreže.



Slika 7. Konvergencija σ_r u "F"

4.2. Analiza debele cijevi izložene unutarnjem tlaku i promjeni temperature

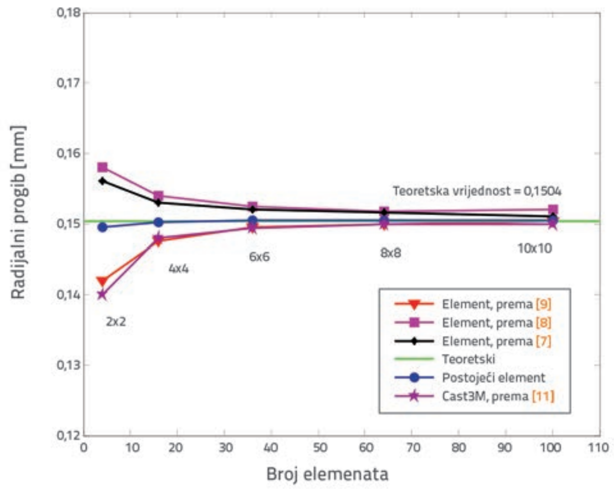
Drugi problem koji se treba razmotriti odnosi se na debelu cijev (slika 8.). Zbog simetrije, samo se jedna četvrtina cijevi uzima u obzir prilikom diskretizacije konačnim elementom.



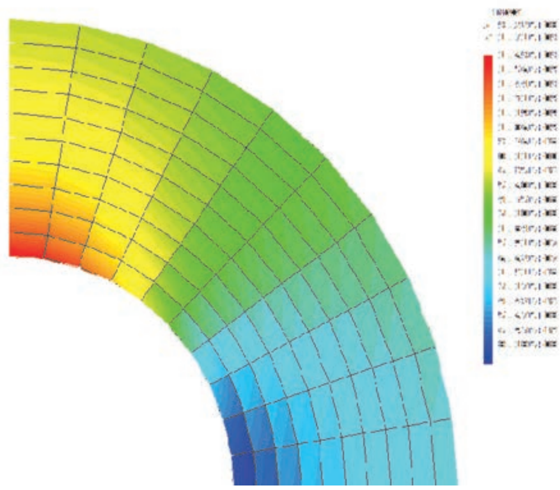
Slika 8. Tlačno i temperaturno opterećenje debelog valjka

4.2.1. Cijev izložena samo unutarnjem tlaku

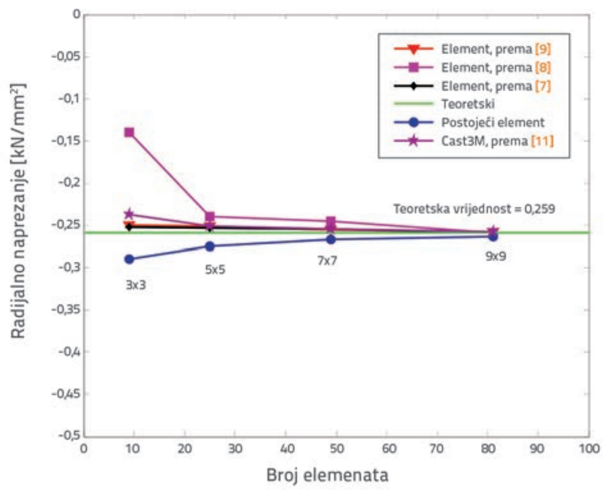
Izračunani rezultati radijalnog progiba te radijalnog i tangencijalnog naprezanja na sredini duž radijalnog presjeka (r = 30 mm) prikazani su na slikama od 9 do 11, gdje se uočava dobra podudarnost rezultata dobivenih pomoću komercijalnog programa Cast3M [11]. Analiza je obavljena na cijevi koja je diskretizirana povećavanjem



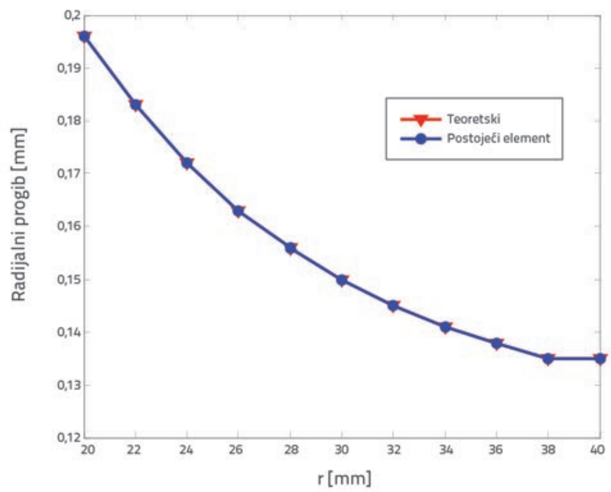
Slika 9. Konvergencija vrijednosti *u* pri *r* = 30 mm



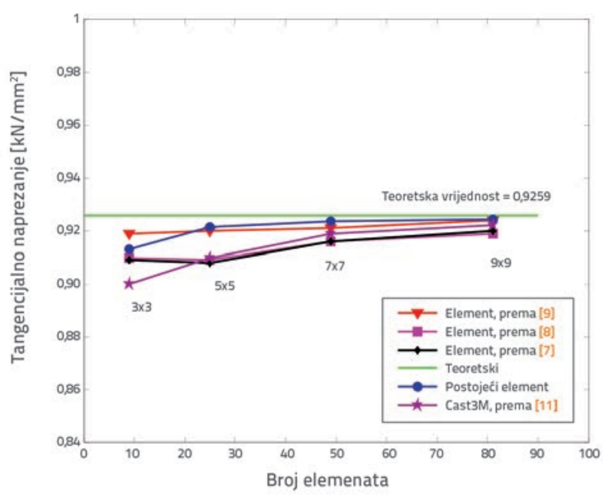
Slika 12. Diskretizacija debele cijevi



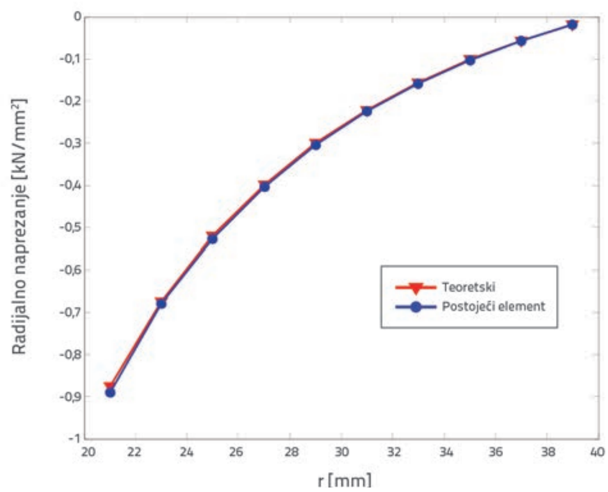
Slika 10. Konvergencija vrijednosti σ_r pri *r* = 30 mm



Slika 13. Promjena vrijednosti *u* pri opterećenju unutarnjim tlakom



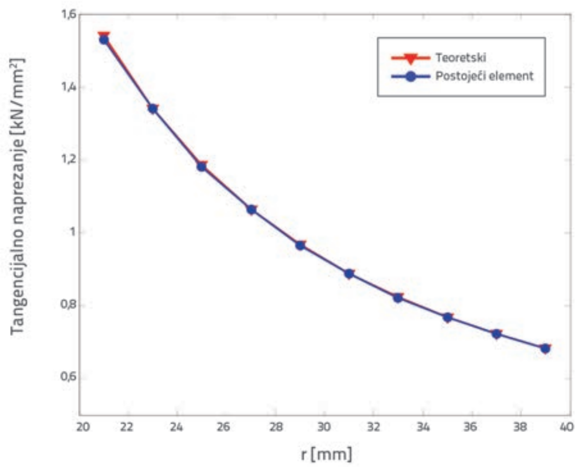
Slika 11. Konvergencija vrijednosti σ_θ pri *r* = 30 mm



Slika 14. Promjena vrijednosti σ_r pri opterećenju unutarnjim tlakom

broja konačnih elemenata. Primjer je iskazan na slici 12.

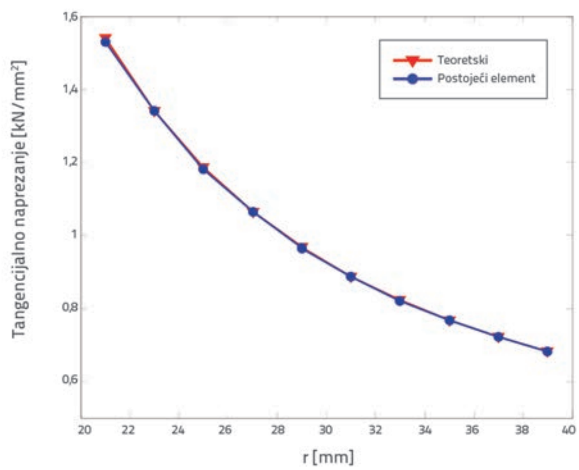
Na ovim se slikama vidi da se konvergencija točnom rješenju postiže čak i kada se koristi gruba mreža. To pokazuje da je na drugim elementima postignut visok stupanj točnosti. Promjena vrijednosti u, σ_r i σ_θ pri opterećenju unutarnjim tlakom prikazana je na slikama 13., 14. i 15.



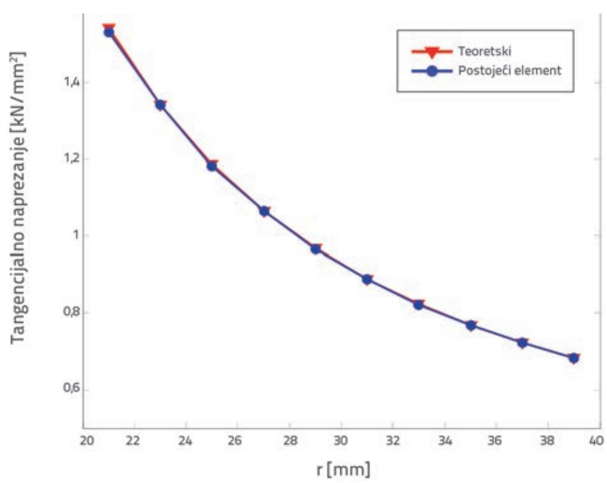
Slika 15. Promjena vrijednosti σ_θ pri opterećenju unutarnjim tlakom

4.2.2. Cijev izložena samo promjeni temperature

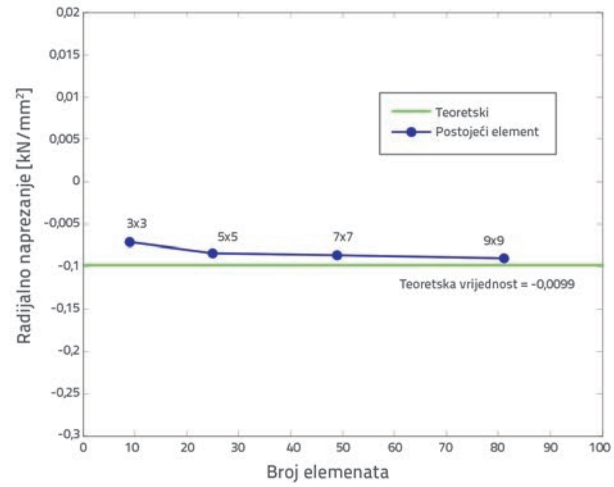
Na slikama 16., 17. i 18. prikazane su konvergencijske krivulje radijalnog progiba te radijalnog i tangencijalnog naprezanja kod vrijednosti *r* = 30 mm cijevi izložene promjeni temperature, a u usporedbi s teoretskim vrijednostima koje predlaže Timoshenko [10]. Može se vidjeti da se za ovaj element ostvaruju dobri rezultati. Promjena vrijednosti *u*, σ_r i σ_θ pri temperaturnom gradijentu prikazana je na slikama 19., 20. i 21.



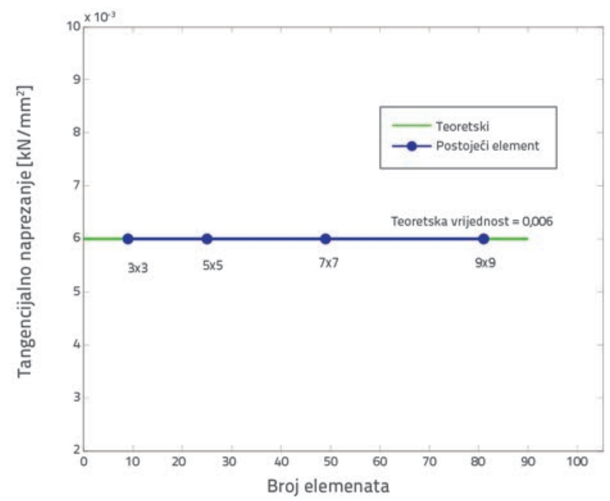
Slika 16. Konvergencija vrijednosti *u* pri *r* = 30 mm



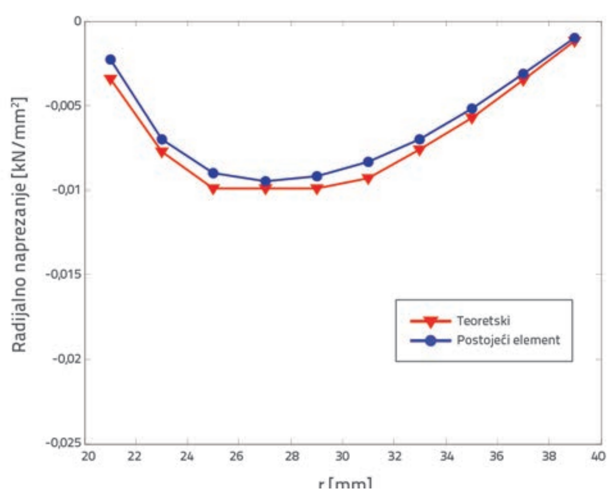
Slika 17. Konvergencija vrijednosti σ_r pri *r* = 30 mm



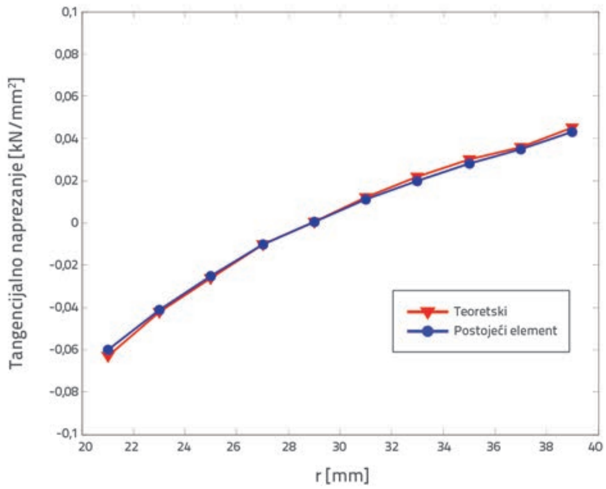
Slika 18. Konvergencija vrijednosti σ_θ pri *r* = 30 mm



Slika 19. Promjena vrijednosti *u* pri temperaturnom gradijentu



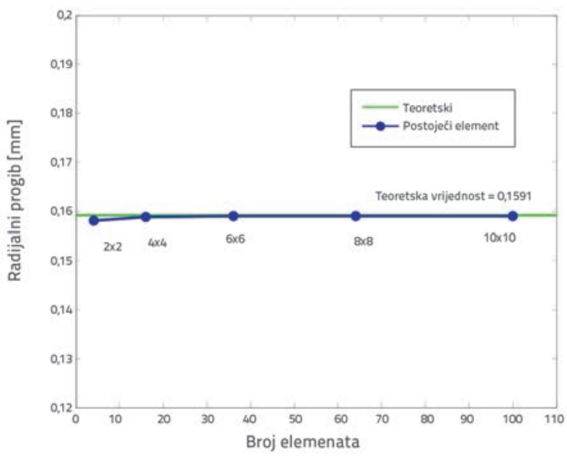
Slika 20. Promjena vrijednosti σ_r pri temperaturnom gradijentu



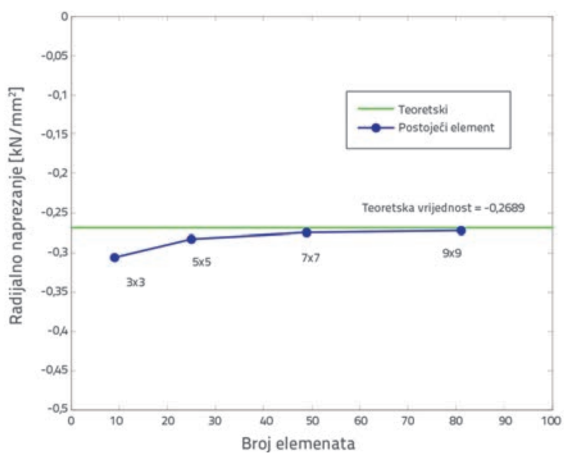
Slika 21. Promjena vrijednosti σ_θ pri temperaturnm gradijentu

4.2.3. Debela cijev izložena kombiniranom opterećenju (unutarnjem tlaku i promjeni temperature)

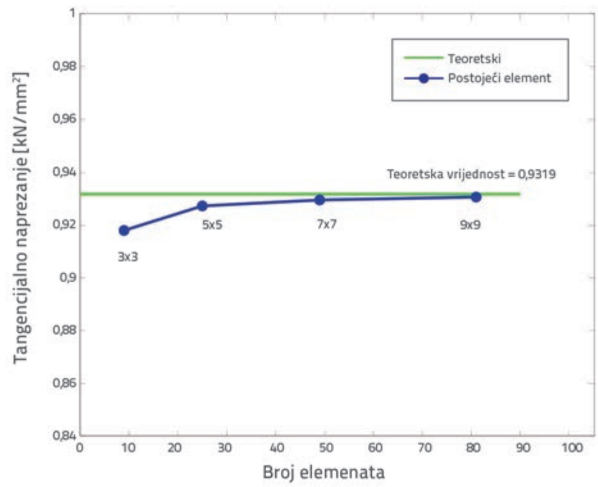
Slike 22., 23. i 24. prikazuju konvergencijske krivulje radijalnog progiba dok slike 25., 26. i 27. prikazuju promjene vrijednosti radijalnog i tangencijalnog naprezanja pri r = 30 mm.



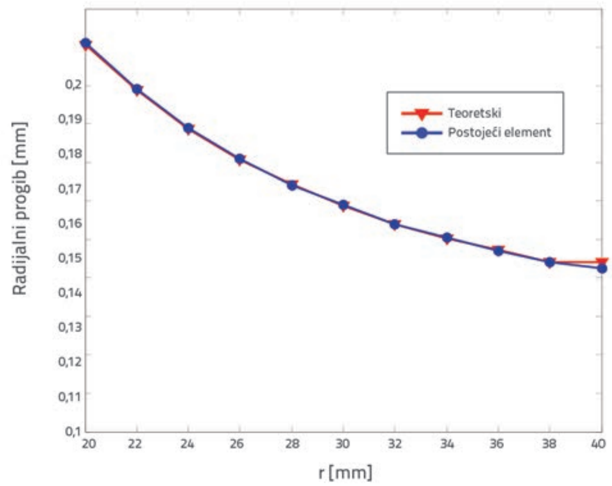
Slika 22. Konvergencija vrijednosti *u* pri *r* = 30 mm



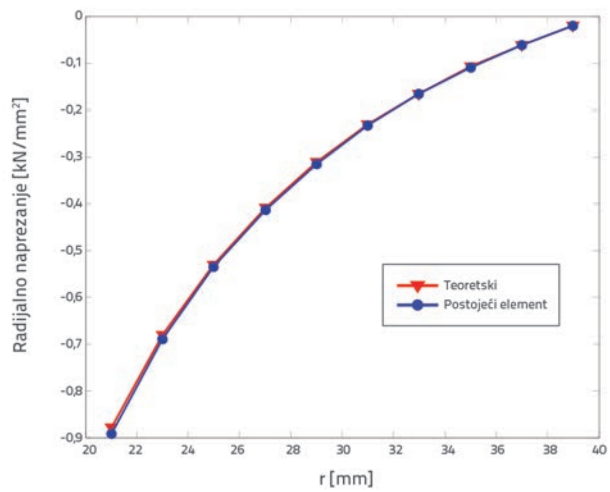
Slika 23. Konvergencija vrijednosti σ_r pri *r* = 30 mm



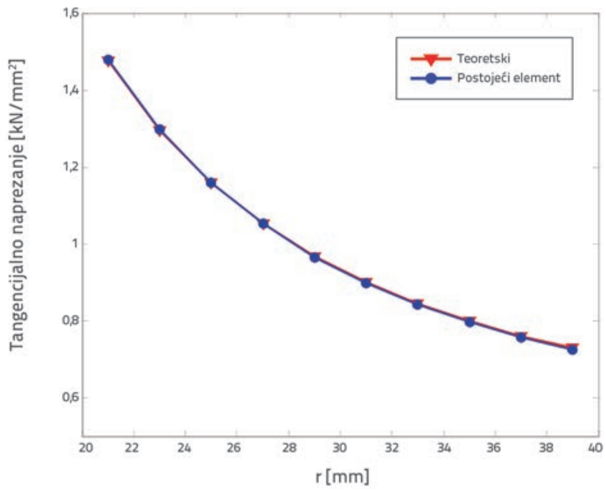
Slika 24. Konvergencija vrijednosti σ_θ pri *r* = 30 mm



Slika 25. Promjena vrijednosti *u* za cijev izloženu kombiniranom opterećenju



Slika 26. Promjena vrijednosti σ_r za cijev izloženu kombiniranom opterećenju



Slika 27. Promjena vrijednosti σ_θ za cijev izloženu kombiniranom opterećenju

5. Zaključak

U ovom se radu koristi na deformaciji utemeljen sektorski konačni element definiran u polarnom koordinatnom sustavu s dva translacijska stupnja slobode i jednom rotacijom u ravnini. Tim se elementom može predvidjeti naprezanje i pomak u bilo kojoj točki cijevi podvrgnutoj kombiniranom opterećenju (unutarnjem tlaku i promjeni temperature). Numerički rezultati analize su uspoređeni s teoretskim rezultatima i vrijednostima koje su dobivene pomoću drugih elemenata te je ustanovljena dobra učinkovitost ovog elementa, uz velike uštede u proračunu i uz manje zahtjevno programiranje.

Prilog

Transformacijska matrica [C] ovog elementa iskazana je kako slijedi:

$$
[C]=\begin{bmatrix}
\cos\beta & \sin\beta & 0 & r_1 & 0 & r_1^2+1 & 0 & 0 & 0 & \beta r_1+1 & r_1^3 & 0 \\
-\sin\beta & \cos\beta & r_1 & -\beta r_1 & \beta r_1 & -\beta & r_1\log(r_1) & -\dfrac{\beta^2 r_1^4}{6} & \dfrac{r_1\beta^2}{2} & -\beta-r_1\,log(r_1)-\dfrac{\beta^2 r_1}{2} & 1 & -2r_1^2 \\
0 & 0 & 1 & -\beta & \beta & -\beta/2r_1 & 1/2+\log(r_1) & -\dfrac{5\beta^2 r_1^3}{12} & \beta & -1-\dfrac{\beta^2}{2}-\log(r_1)-\dfrac{\beta}{2r_1} & 1 & -3r_1 \\
\cos\beta & -\sin\beta & 0 & r_1 & 0 & r_1^2+1 & 0 & 0 & 0 & -\beta r_1+1 & r_1^3 & 0 \\
\sin\beta & \cos\beta & r_1 & \beta r_1 & -\beta r_1 & \beta & r_1\log(r_1) & -\dfrac{\beta^2 r_1^4}{6} & \dfrac{r_1\beta^2}{4} & \beta-r_1\log(r_1)-\dfrac{\beta^2 r_1}{2} & 1 & -2r_1^2 \\
0 & 0 & 1 & \beta & -\beta & \dfrac{\beta}{2r_1} & \dfrac{1}{2}+\log(r_1) & -5\beta^2 r_1^3 & \dfrac{\beta^2}{4} & -1-\dfrac{\beta^2}{2}-\log(r_1)+\dfrac{\beta}{2r_1} & 1 & -3r_1 \\
\cos\beta & \sin\beta & 0 & r_2 & 0 & r_2^2+1 & 0 & 0 & 0 & \beta r_2+1 & r_2^3 & 0 \\
-\sin\beta & \cos\beta & r_2 & -\beta r_2 & \beta r_2 & -\beta & r_2\log(r_2) & -\dfrac{\beta^2 r_2^4}{6} & \dfrac{r_2\beta^2}{4} & -\beta-r_2\log(r_2)-\dfrac{\beta^2 r_2}{2} & 1 & -2r_2^2 \\
0 & 0 & 1 & -\beta & \beta & -\dfrac{\beta}{2r_2} & \dfrac{1}{2}+\log(r_2) & -5\beta^2 r_2^3 & \dfrac{\beta^2}{4} & -1-\dfrac{\beta^2}{2}-\log(r_2)-\dfrac{\beta}{2r_2} & 1 & -3r_2 \\
\cos\beta & -\sin\beta & 0 & r_2 & 0 & r_2^2+1 & 0 & 0 & 0 & -\beta r_2+1 & r_2^3 & 0 \\
\sin\beta & \cos\beta & r_2 & \beta r_2 & -\beta r_2 & \beta & r_2\log(r_2) & -\dfrac{\beta^2 r_2^4}{6} & \dfrac{r_2\beta^2}{2} & \beta-r_2\log(r_2)-\dfrac{\beta^2 r_2}{2} & 1 & -2r_2^2 \\
0 & 0 & 1 & \beta & -\beta & \beta/2r_2 & \dfrac{1}{2}+\log(r_{2)} & -\dfrac{5\beta^2 r_2^3}{12} & -\beta & -1-\dfrac{\beta^2}{2}-\log(r_2)+\dfrac{\beta}{2r_2} & 1 & -3r_2
\end{bmatrix}
$$

LITERATURA

[1] Rebiai, C., Belounar, L.: A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis, Archives of Civil and Mechanical Engineering, 13 (2013) 1, pp. 72–81.

[2] Djoudi, M.S., Bahai, H.: Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with opening, Thin-Walled Structures, 42 (2004) 4, pp. 575–588.

[3] Himeur, M., Guenfoud, M.: Bending triangular finite element with a fictious fourth node based on the strain approach, European Journal of Computational Mechanics, 20 (2012) 7-8, pp. 455-485.

[4] Ergatoudis, I., Irons, B. M., Zienkiewicz, O.C.: Curved isoparametric quadrilateral element for finite element analysis, International journal of solids and structures, 4 (1968) 1, pp. 31-42.

[5] Raju, I.S., Rao, A.K.: Stiffness matrices for sector element, A.I.A.A. J., 7 (1969) 1, pp.156-157.

[6] Sabir, A.B., Sfendij, A.: Finite element for plane elasticity problems, Proceeding of conference femcad crash, Institute for industrial technology transfer, Paris, pp.137-144, 1993.

[7] Sabir, A.B., Salhi, H.Y.: A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, Res. mechanica, 19(1986) 1, pp. 1-16.

[8] Sabir, A.B., Djoudi, M.S.: A sector in plane finite element with a rotational degree of freedom, proceeding of the 5th International conference of the structural engineering. Technology Transfert series, pp. 55-62, 1990.

[9] Bouzrira, C., Sabir, A.B., Nemouchi, Z.: A sector inplane finite element in polar coordinates with rotational degree of freedom, Archives of civil engineering, LI (2005) 4, pp. 471-483.

[10] Timoshenko, S., Goodier, J. N.: Theory of elasticity, Third edition, Mc Graw Hill, New York, 1951.

[11] Cast3M, *www-cast3m.cea.fr*