

Primljen / Received: 5.11.2021.
Ispravljen / Corrected: 15.7.2022.
Prihvaćen / Accepted: 14.8.2022.
Dostupno online / Available online: 10.10.2022.

Utjecaj vibracija uzrokovanih željezničkim prometom na građevine i ljude u urbanim područjima

Autori:



Dr.sc. **Nikola Naumovski**, dipl.ing.stroj.
Institut za potresno inženjerstvo i inženjersku seismologiju, Skoplje, Makedonija
nikolan@iziis.ukim.edu.mk



Prof.dr.sc. **Viktor Hristovski**, dipl.ing.građ.
Institut za potresno inženjerstvo i inženjersku seismologiju, Skoplje, Makedonija
viktor@iziis.ukim.edu.mk

Autor za korespondenciju



Prof.dr.sc. **Lidija Krstevska**, dipl.ing.građ.
Institut za potresno inženjerstvo i inženjersku seismologiju, Skoplje, Makedonija
lidija@iziis.ukim.edu.mk

Pregledni rad

Nikola Naumovski, Viktor Hristovski, Lidija Krstevska

Utjecaj vibracija uzrokovanih željezničkim prometom na građevine i ljude u urbanim područjima

Željeznički promet značajan je izvor vibracija koje mogu utjecati na kvalitetu života ljudi koji žive u blizini prometnih željezničkih pruga. U ovom je istraživanju predložena integrirana metodologija za analizu utjecaja vibracija uzrokovanih željezničkim prometom na ljude i okolne zgrade te mjere za smanjenje njihovih učinaka. Istraživanje uključuje mjerjenja in situ i numeričko modeliranje vibracija izazvanih željezničkim prometom. Predloženi integrirani metodološki pristup provodi se na dijelu aktivne željezničke pruge Kumanovo–Deljadrovci u Sjevernoj Makedoniji. Saznanja stečena ovim istraživanjem trebala bi pružiti dobru osnovu za definiranje nacionalnih normi za ovo sve relevantnije pitanje.

Ključne riječi:

vibracije uzrokovane željezničkim prometom, mjerjenje vibracija in situ, metoda konačnih elemenata, krivulja prigušenja

Research Paper - Subject review

Nikola Naumovski, Viktor Hristovski, Lidija Krstevska

Influence of railway induced vibrations on structures and humans in urban areas

Railway traffic is a significant source of vibration that can affect the quality of life of people living near busy railways. This study proposes an integrated methodology for analysing the impact of vibrations from railway traffic on people and nearby buildings and measures for reducing their effects. The research includes both in-situ measurements and numerical modelling of railway traffic-induced vibrations. The proposed integrated methodological approach is implemented on a section of the active Kumanovo–Deljadrovci railway line in North Macedonia. The knowledge gained through this research is intended to provide a good basis for defining national standards for this increasingly relevant issue.

Key words:

railway vibrations, in-situ vibration measurement, finite element method, attenuation curve

1. Uvod

Ovo istraživanje predstavlja ažuriranu i poboljšanu verziju rada koji je izvorno objavljen na konferenciji 1CroCEE (1st Croatian Conference on Earthquake Engineering), [1].

Željeznički promet značajan je izvor vibracija koje utječu na kvalitetu života ljudi koji žive u blizini prometnih željezničkih pruga. Vibracije uzrokovanе željezničkim prometom prvotno su proučavane i definirane kao problem prilikom izgradnje podzemnih željezničkih linija. Međutim, u posljednje vrijeme sve se veća pozornost stavlja na vibracije koje su uzrokowane željezničkim prometom koji prometuje površinom tla. Vibracije koje se prenose kroz tlo obično su popraćene bukom koja se prenosi kroz zrak, što također može predstavljati veliki problem. Pojava tih dvaju fenomena (vibracija i buke) uglavnom ovisi o vrsti prometa, stanju vozne površine tračnica, pričvršnom priboru, elastičnim elementima u kolosiječnoj konstrukciji i vrsti tla.

Iako se vibracije uzrokowane prolaskom vlakova ne smatraju glavnim razlogom za nastanak konstrukcijskih oštećenja na okolnim zgradama, dodatna oštećenja izazvana vibracijama uočena su na nekim starim zidanim građevinama [2, 3]. Štoviše, na konstrukcijama oštećenima potresom mogu se pojaviti dodatna oštećenja uzrokowane vibracijama, a sadašnji primjer takvog slučaja je potres u Zagrebu koji se dogodio u ožujku 2020. [4-9]. S druge strane, vibracije su često razlog stalne tjeskobe i nelagode kod stanara zgrada u blizini željezničkih pruga. Međutim, učinak vibracija na udobnost ljudi i njihovu anksioznost vrlo je složen problem koji se ne može tretirati samo proučavanjem promatranih razina vibracija, već treba uključiti i buku uzrokowanu prolaskom vlakova koja se prenosi zrakom [10]. Štoviše, svjedoci smo sve veće aktualnosti problema. Ekološka zabrinutost vjerojatno je razlog sve veće pozornosti društva, posebice inženjera i arhitekata koji se bave urbanističkim planiranjem, koja se pridaje problemu vibracija uzrokowane željezničkim vozilima i njihovom utjecaju na udobnost ljudi, te funkcioniranju osjetljive opreme ugrađene u građevine izložene vibracijama.

Zasada u Republici Sjevernoj Makedoniji ne postoje nacionalne smjernice ili norme koje se odnose na vibracije iz različitih izvora i njihov utjecaj na nastanjene građevine. Postoji niz nacionalnih normi u Europi [11-13], SAD-u [14], Australiji [15], Japanu [16] itd.; međutim, prihvatljiva (dopuštena) razina smetnji varira. Nemaju sve zemlje posebna ograničenja za vibracije uzrokowane željezničkim prometom, a europsko zakonodavstvo o vibracijama uzrokowanima željezničkim prometom još je u razvoju; doduše, u kasnijoj fazi razvoja. Na razini EU, Direktiva (EU) 2016/797 Europskog parlamenta i Vijeća od 11. svibnja 2016. odnosi se na interoperabilnost željezničkog sustava u okviru Europske zajednice [17]. Prilog III (Osnovni zahtjevi), stavak 1.4.5 (Zaštita ljudskog okoliša), navodi da rad željezničkog sustava i njegovo održavanje ne smiju dovesti do nedopuštene razine vibracija koje se prenose tlom u područjima u blizini infrastrukture.

Cilj je ovog istraživanja stjecanje znanja o prirodi vibracija uzrokovanih željezničkim prometom, njihovom širenju i utjecaju na ljudi i konstrukcije u svrhu razvoja cijelovitog pristupa analizi učinka vibracija i poduzimanja mjera za njihovo uklanjanje ili ublažavanje. Predloženi integrirani pristup provodi se na dionici željezničke pruge Kumanovo–Deljadrovci u Sjevernoj Makedoniji. On se može primijeniti za razvoj dugoročne strategije za analizu vibracija koje su uzrokowane željezničkim prometom u svrhu rekonstrukcije postojećih i izgradnje novih željezničkih pruga. Naime, učinci vibracija na ljudsko tijelo predstavljaju gotovo neistraženo područje proučavanja. Rana istraživanja i sustavna promatravanja učinaka vibracija na ljudi u smislu kliničkih, medicinskih i psiholoških istraživanja, uključujući udobnost, datiraju iz devetnaestog stoljeća. S razvojem i širenjem industrije, prometa i urbanizacije, u dvadesetom se stoljeću znatno povećala i količina relevantne znanstvene literature. Jedno od prvih i najpopularnijih sustavnih istraživanja na ovu temu koje su proveli Goldman i von Gierke [18] datira s početka 1960-ih. Griffin je sedamdesetih godina objavio nekoliko važnih istraživanja o učinku vibracija na čovjeka [19]. U posljednjih pedeset godina u ovom je području postignut veliki napredak tako da se brojna istraživanja, poput izvješća o aktualnom stanju, koje je navedeno u literaturi pod [21] i povijesnog pregleda pod [20], mogu smatrati normama.

2. Integrirana metodologija za procjenu razine vibracija

Krajnji je cilj prikazane metodologije za analizu utjecaja vibracija uzrokovanih željezničkim prometom na ljudi i građevine predložiti odgovarajuće mjere za ublažavanje njihova učinka. Na taj se način može implementirati dugoročna strategija razvoja analize vibracija uzrokovanih željezničkim prometom pri rekonstrukciji postojećih i izgradnji novih željezničkih pruga. Istraživanje je provedeno u više faza:

- istraživanje postojećih iskustava i znanja, literature i normi vezanih uz vibracije uzrokovanih željezničkim prometom
- mjerjenje vibracija *in situ* na odabranim kritičnim točkama na lokacijama u urbanom području za odabranu dionicu željezničke pruge kako bi se doble krivulje prigušenja potrebne za procjenu učinka vibracija
- izrada i verifikacija numeričkih modela temeljenih na metodi konačnih elemenata (eng. *Finite Element Method - FEM*) za verifikaciju krivulja prigušenja dobivenih mjerjenjima *in situ*
- analiza dobivenih podataka i procjena učinaka (tj. učinak vibracija na građevine i ljudi korištenjem odgovarajućih postojećih normi)
- definiranje mjera za smanjenje razina vibracija uzrokovanih željezničkim prometom.

Predloženi integrirani metodološki pristup za definiranje i analizu vibracija i njihovog utjecaja primijenjen je na određenoj dionici željezničke pruge Kumanovo–Deljadrovci. Spoznaje dobivene ovim istraživanjem mogu poslužiti kao dobra osnova

za definiranje nacionalnih normi Sjeverne Makedonije za probleme povezane s vibracijama uzrokovanimi željezničkim prometom, koji sve više dobivaju na važnosti.

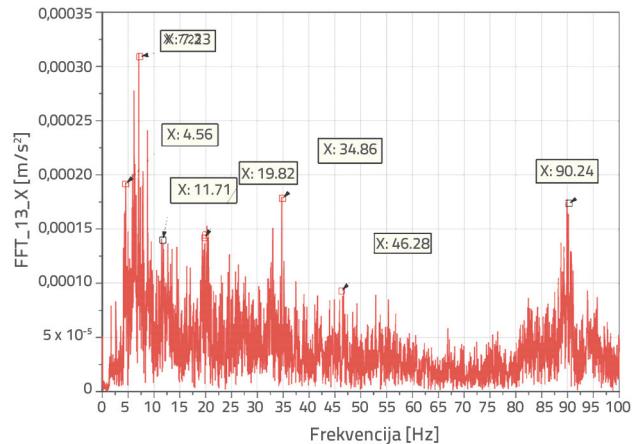
2.1. Mjerenja *in situ*

Predložena metodologija uključuje terensko ispitivanje te numeričko modeliranje i analize. Metodologija je primijenjena na dionici pruge Kumanovo–Deljadrovci u okviru projekta geofizičkog ispitivanja svojstava tla i mjerenja vibracija uzrokovanih prolaskom željezničkih vozila [22]. Terensko ispitivanje uključivalo je sljedeće korake:

- Identifikacija kritičnih zona (žarišta) i terensko promatranje svih objekata u blizini željezničke pruge.
- Geofizička mjerenja odabranih profila kritičnih zona metodom "udarnog opterećenja" (eng. *hammer blow*) i definiranje geoloških profila pomoću svojstava slojeva tla [22].
- Mjerenje razina vibracijskih brzina uzimajući u obzir brzinu prolaska vlakova za odabrani profil i mjerenje vibracijskih ubrzanja pomoću akcelerometara [23].
- Izrada krivulja prigušenja na temelju izmjerjenih vibracijskih brzina i ubrzanja kako bi se napravilo predviđanje u pogledu razine vibracija u građevinama smještenima na žarištima.
- Evaluacija potrebnih mjera za smanjenje razina vibracija.

Mjerenja su provedena za profil "RP-3 Romanovce" [23] na dionici pruge Kumanovo–Deljadrovci. Za izvođenje mjerenja korištena je oprema sa sustavom prikupljanja podataka koji se sastoji od seizmičkih akcelerometara koji bilježe vibracijska ubrzanja. Korišten je PCB Piezotronics uređaj, model 393B12, proizvođača National Instruments, s osjetljivošću od 10.000 mV i rasponom do 4.9 m/s^2 (tj. 0,5 g) s NI 9234 karticama.

Proučena su dva različita slučaja: s obližnjom građevinom (mala kuća udaljena 11 m od željezničke pruge) i bez takve građevine. Provedeno je pet vrsta ispitivanja, točnije, ispitivanje vibracija okoline, ispitivanje tla standardnim penetracijskim pokusom (eng. *Standard Penetration Test - SPT*) te ispitivanje buke putničkog vlaka, teretnog vlaka i lokomotive pomoću „pass-by“ metode. Sva mjerenja obavljena su na pet točaka; za slučaj koji ne uzima u obzir prisutnost obližnje kuće, pet točaka je bilo na površini tla, dok su za slučaj koji uzima u obzir obližnju kuću tri točke bile smještene u građevini, a dvije na površini tla. Analiza podataka provedena je prema poljskoj normi PN-88/B-02171 [13], koja se temelji na normama ISO 2631-1 [24] i ISO 2631-2 [25]. Slika 1. prikazuje Fourierov spektar vibracijskih ubrzanja dobiven iz mjerenja vibracijskih ubrzanja najudaljenije točke (br. 5) na udaljenosti od 60 m od željezničke pruge pomoću profila RP 3 (slike 2. i 6. prikazuju mjerne točke, odnosno FEM model). Prikazani podaci odnose se na slučaj koji ne uzima u obzir obližnje građevine, te mjeri podatke pri prolasku teretnog vlaka. Navedeni rezultati odabrani su kao reprezentativni za usporedbu s vlastitim vibracijskim frekvencijama naslaga tla dobivenih numeričkom analizom (opisano u sljedećem poglavljju) jer je utjecaj pobude od vibracija u točki br. 5 bio najmanje izražen.



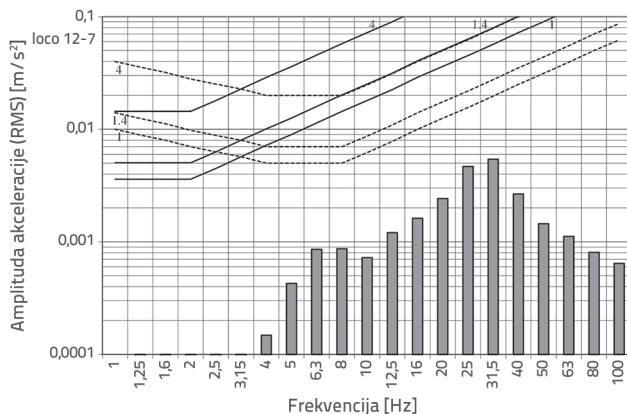
Slika 1. Fourierov spektar za odabrani profil tla RP-3 Romanovce, x-smjer



Slika 2. Mjerne točke na profilu RP-3 Romanovce: tlocrt (gornja fotografija) i horizontalni prikaz (donja fotografija)

Dijagram na slici 3. prikazuje izmjerenu razinu vibracija u obližnjoj kući. Frekvencije i intenziteti vibracija uspoređeni su s

onima navedenima u normi PN-88/B-02171 [13] (dijagrami za $n = 1, 1,4$ i 4, gdje je n parametar koji ovisi o broju ponavljanja događaja). Isprekidane i pune linije odnose se na horizontalni, odnosno vertikalni smjer ljudske percepcije.



Slika 3. Dijagram izmjerjenih razina vibracija u obližnjoj kući u usporedbi s razinama ljudskog praga percepcije (dijagrami iznad stupaca pokazuju različite vrijednosti parametra $n = 1, 1,4$ i 4) na temelju norme PN-88/B-02171 [13]

2.2. Izrada seizmičko-geoloških profila pomoću geofizičkih ispitivanja

Standardni penetracijski pokus primijenjen je za određivanje svojstava širenja valova u tlu za odabrana žarišta [22]. Svrha je ovog ispitivanja generiranje vibracijskog impulsa koji putuje od izvora (točke udara) do primatelja (objekta) na sličan način kao kod vibracija izazvanih vlakom. Instalirani senzori (mjerači) bilježili su vrijednosti putem višekanalnog sustava prikupljanja. Prijenosna funkcija (krivulja prigušenja) dobivena je za svaki odabrani profil na temelju odgovora tla na udarno opterećenje utega mjereno pomoću 12 geofona postavljenih na udaljenosti od 5 m u poprečnom profilu duljine 60 m (slike 2. i 6.). Vrijednosti su također dobivene postavljanjem akcelerometara na pet točaka, u tri smjera, u intervalima od 10 min (napomena: prva je točka bila 5 m udaljena od željezničke pruge). Seizmičko-geološka struktura mjerенog profila sastavljena je koristeći

geofone. Izračunom dobivene brzine iz ubrzanja, dobivena su ubrzanja na svih 12 mjernih točaka (geofona) te je tako dobivena krivulja prigušenja profila.

Geofizički standardni penetracijski pokus primijenjen je za procjenu brzina širenja seizmičkih valova (uzdužna brzina V_p i transverzalna brzina V_s) za svih sedam profila na dionici pruge Kumanovo-Deljadrovcu. Slika 4. prikazuje seizmičko-geološki raspored slojeva tla za profil 'RP-3 Romanovce' i dobivene brzine: $V_p = 390 \text{ m/s}$ i $V_s = 170 \text{ m/s}$ za sloj 1 (0 - 2,0 m dubine); $V_p = 870 \text{ m/s}$ i $V_s = 390 \text{ m/s}$ za sloj 2 (2,0 - 11,0 m dubine); i $V_p = 2200 \text{ m/s}$ i $V_s = 850 \text{ m/s}$ za sloj 3 (11,0 - 20,0 m dubine) (tablica 1.). Te su brzine služile za određivanje svojstava slojeva tla korištenih u numeričkom FEM modeliranju i analizi. Sloj broj 2, označen kao 'el-dl', sastojao se uglavnom od eluvijalnog materijala u kombinaciji s deluvijalnim naslagama prašinaste gline, a sloj broj 3, označen kao "Pl", uglavnom od pijeska, gline i pješčenjaka.



Slika 4. Rezultati geofizičkih ispitivanja odabranog profila tla RP-3 Romanovce

2.3. Numeričko modeliranje i analiza

S računske točke gledišta, mehaničke vibracije izazvane u tlu zbog prometovanja željezničkih vozila predstavljaju složeni dinamički problem. Za modeliranje cijelokupnog sustava (izvora vibracija, tla i građevina) potrebno je poznavati fiziku širenja vibracija i uvjete koji utječu na širenje. Slijedeći metodu koju su predložili Yang i Hung [26], razlikuju se četiri glavne faze prijenosa vibracija kroz tlo od izvora (tj. od željezničke pruge do izloženih građevinskih objekata). Prva je faza nastanak vibracija; druga faza uključuje prijenos vibracija kroz tlo; treća se faza odnosi na prijem vibracija obližnjih građevinskih objekata; a četvrta faza odnosi se na smanjenje vibracija koje je rezultat pravilno projektirane temeljne konstrukcije ili postavljenih barijera za zaštitu od vibracija itd. Cjelovit problem koji uključuje

Tablica 1. Svojstva slojeva tla

Parametri	Slojevi Sloj 1: $H = 0,0 - 2,0 \text{ m}$	Sloj 2: $H = 2,0 - 11,0 \text{ m}$	Sloj 3: $H = 11,0 - 20,0 \text{ m}$
$V_p [\text{m/s}]$	390	870	2200
$V_s [\text{m/s}]$	170	390	850
$r [\text{t/m}^3]$	1,0	1,1	1,2
$h [\text{m}]$	2,0	9,0	9,0
m	0,383	0,374	0,412
$E [\text{kPa}]$	79921	459853	2448867

sve četiri faze može se riješiti različitim pristupima koji se mogu primjenjivati pojedinačno ili kombinirano. Do sada su uspostavljeni sljedeći pristupi: analitički pristup, terenska (*in situ*) mjerena, modeli s empirijskim predviđanjem (postavljanjem krivulja prigušenja) te numeričko modeliranje i simulacija. Brojni autori predlažu različite analitičke pristupe i metode [27]. Ovi su pristupi definirani bliskim analitičkim odnosima i rješenjima koja ovise o parametrima, kao što su brzina vlaka, udaljenost izvora od recipienta i svojstva tla. Međutim, pristup koji uključuje mjerjenje razine vibracija *in situ* pri prometovanju različitih tipova željezničkih vozila, omogućuje proučavanje njihovog utjecaja na obližnje građevine i stanovnike. Osim toga, iz takvih mjerena moguće je izvući podatke i izraditi krivulje prigušenja te pomoći njih odrediti minimalne udaljenosti građevina od željezničke pruge, gdje razina vibracija neće prelaziti dopuštene razine prema primjenjivim normama. Iako ova mjerena (slična onima o kojima se govori u poglavljiju 2.2) zahtijevaju intenzivnu aktivnost i često su preskupa ako se prikupljaju u kombinaciji s utvrđivanjem krivulja prigušenja, ona mogu biti važan čimbenik za određivanje razine vibracija.

Osim mjerena *in situ*, u ovom istraživanju primjenjuje se i numerički iz nekoliko razloga. Kao prvo, razvijen je za verifikaciju rezultata *in situ* mjerena, a kao drugo, za kalibraciju numeričkog modela. Predloženi numerički model mogao bi biti koristan alat za numeričko predviđanje razina vibracija u promatranoj građevini. U ovom je radu prikazana verifikacija FEM modela i rasprava o usporedbi rezultata izmjerena vlastitih frekvencija naslaga tla te onih koje su dobivene numerički. Štoviše, razmatraju se rezultati dinamičke analize za izračun raspodjele vibracija u vremenskoj domeni korištenjem istog numeričkog modela. Kao što je već spomenuto, terenska istraživanja i analize obavljeni su za profil na dionici pruge Kumanovo–Deljadrovci.

H [m]	h [m]	v_p [m/s]	v_s [m/s]	ρ [kg/m ³]
H_1	h_1	v_{p1}	v_{s1}	ρ_1
H_2	h_2	v_{p2}	v_{s2}	ρ_2
H_k	h_k	v_{pk}	v_{sk}	ρ_k
H_{k+1}	h_{k+1}	$v_{p{k+1}}$	$v_{s{k+1}}$	ρ_{k+1}
H_n	h_n	v_{pn}	v_{sn}	ρ_n

Slika 5. Generalizirani geotehnički model (GTM) s osnovnim parametrima za sve slojeve tla

Dinamička svojstva tla imaju ključnu ulogu u prijenosu vibracija na obližnje građevine. Međutim, ona ovise o mnogim čimbenicima, uključujući geološki sastav, broj slojeva, prostornu raspodjelu, dubinu, H_i i debljinu, h_i , sloja i svojstva materijala sloja, kao što je jedinična gustoća, ρ_i , Youngov modul elastičnosti, E_i , modul posmika, G_i , Poissonov koeficijent, η_i , kut unutarnjeg trenja i kohezija materijala. Slika 5. prikazuje generalizirani geotehnički

model [28] s osnovnim parametrima za sve slojeve tla. Brzine širenja longitudinalnog seizmičkog vala, V_p , i transverzalnog seizmičkog vala, V_s , općenito se izražavaju kao funkcije svojstava materijala sloja tla (tj. Youngov modul elastičnosti, E , modul posmika, G , gustoća, ρ i Poissonov koeficijent ν) kako slijedi:

$$V_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (1)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2)$$

Međutim, ako su brzine transverzalnih seizmičkih valova za sve slojeve tla poznate iz geofizičkih mjerena, prevladavajući period vibracija, T_0 , za profil tla može se izračunati pomoći sljedećih dobro poznatih izraza [28]:

$$T_0 = \frac{4H}{V_s} \quad (3)$$

pri čemu je

$$H = \sum_{i=1}^n h_i \quad (4)$$

$$\bar{V}_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_{si} h_i}{\sum_{i=1}^n h_i} \quad (5)$$

Period vibracija, T_m , za viši stupanj m može se dobiti pomoći sljedećeg izraza:

$$T_m = \frac{4H}{(2m-1)\bar{V}_s} \quad (6)$$

Numerički modeli koji se obično koriste u analizi kontinuituma tla i stijena s razmatranjem i bez razmatranja diskontinuiteta su [29]:

- modeli kontinuuma koji koriste metodu konačnih razlika (FDM), FEM i metodu rubnih elemenata (BEM)
- modeli diskontinuuma primjenom metode diskretnih elemenata (DEM) i metode diskretne mreže pukotina (DFN)
- hibridni modeli kontinuuma/diskontinuuma korištenjem hibridnih FEM/BEM, hibridnih DEM/DEM i hibridnih FEM/DEM metoda.

Analize vibracija uzrokovanih željezničkim prometom i njihovo širenje provedene su u ovom istraživanju pomoći dvodimenzionalnih (2D) i trodimenzionalnih (3D) modela primjenom metode FEM. Za 2D modele mora se uzeti u obzir slučaj ravinske deformacije po jedinici duljine u smjeru okomitom na promatrani poluprostor. Ti su 2D modeli primjereni ako se izvori vibracija nalazi duž smjera okomitog na razmatrani poluprostor (poput prolaska putničkih i teretnih vlakova); međutim, ti se

modeli također mogu koristiti za točkaste izvore vibracija (npr. udarna (dinamička) opterećenja koja se primjenjuju u standardnom penetracijskom pokusu). Iako 3D modeli eliminiraju moguće probleme u modeliranju izvora vibracija, oni zahtijevaju više memorije i dugotrajnije proračune te precizniju diskretizaciju, bez obzira na to kojom se numeričkom metodom koristi.

Glavni problem koji se javlja tijekom modeliranja poluprostora pomoću metode FEM jest taj kako definirati razmatranu domenu izvora i prijenosa vibracija (tj. definiranje graničnih uvjeta). Uz metode primjenjene u prethodnim istraživanjima, postoji nekoliko pristupa rješavanju spomenutog problema koristeći se samo metodom FEM:

- modeliranje dodatne domene poluprostora u horizontalnom smjeru, unutar polumjera od 3-5 dubina naslaga, mjereno do stjenovite podloge
- modeliranje odgovarajućih opruga na krajevima obuhvaćene domene za stimuliranje učinka okolnih medija
- korištenje beskonačnih elemenata na krajevima obuhvaćene domene.

U ovom su istraživanju primjenjena prva dva pristupa. Prvi je pristup korišten za 2D model razvijen pomoću konačnih elemenata gdje su dodane dodatne domene lijevo i desno u horizontalnom smjeru, unutar polumjera od tri dubine naslaga tla. Granični uvjeti po translacijskim stupnjevima slobode duž duljina granice bili su propisani kao pomak nula. Drugi pristup koji uključuje postavljanje opruga na rubne plohe domene korišten je u razvoju 3D modela s konačnim elementima. Oba se modela detaljnije opisuju u nastavku teksta. Da bi se izvršilo numeričko modeliranje i dinamička analiza razmatranog područja pod utjecajem vibracija, potrebno je definirati E , G , n i r parametre za sve slojeve tla. Primjenjena je sljedeća jednadžba iz teorije elastičnosti između modula posmika, G , i Youngovog modula elastičnosti, E :

$$G = \frac{E}{2(1+2\nu)} \quad (7)$$

Poissonov koeficijent, ν , i Youngov modul elastičnosti, E , može se dobiti iz sustava jednadžbi (1), (2) i (7), kako slijedi:

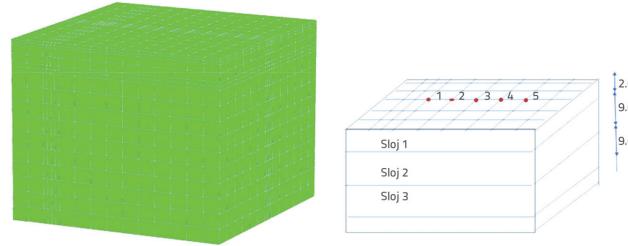
$$\mu = \frac{2V_s^2 - V_p^2}{2(V_s^2 - V_p^2)} \quad (8)$$

$$E = 2V_s^2 \rho (1+\nu) \quad (9)$$

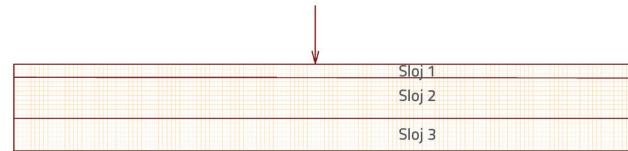
Gustoća, ρ , se može dobiti u laboratoriju na temelju mjerjenja uzorka tla *in situ*. Budući da ova vrsta mjerjenja nije provedena u našem istraživanju, gustoća slojeva tla primjenjena je na temelju empirijskih tablica koje uključuju klasifikaciju tla. Sukladno s brzinama izmjerenima pomoću geofizičkih istraživanja za profil 'RP-

3 Romanovce', primjenom izraza (7), (8) i (9), potrebne elastično-mehaničke karakteristike slojeva tla izračunane su za analizu korištenjem konačnih elemenata, kako je navedeno u tablici 1.

2D i 3D FEM modeli generirani su s ovom početnom procjenom elastično-mehaničkih karakteristika slojeva tla izračunanih pomoću poznatih brzina (prethodno dobivenih posebnim geofizičkim mjerjenjima), te položaja i orientacije slojeva u razmatranom profilu 'RP- 3 Romanovce' (slika 4.). 3D model (slika 6.) sastoji se od 3D SOLID izoparametrijskih elemenata sa 20 čvorova za modeliranje poluprostora tla, integracijske sheme $3 \times 3 \times 3 = 27$ Gaussovih (integracijskih) točaka i 3D točkastih SPRING elemenata (opruga) sa zadanim vrijednostima krutosti duž tri globalna translacijska stupnja slobode X, Y, Z u svim čvorovima četiriju vertikalnih graničnih površina unutar okolnog tla. Najniža horizontalna ploha je modelirana sprječavanjem pomaka duž tri globalna stupnja slobode X, Y, Z. To je poslužilo kao kalibracijski model za karakteristike sloja i provjeru rezultata dobivenih za prirodne vibracije naslaga tla za razmatrani profil 'RP-3 Romanovce'. 2D model (slika 7.) sastoji se od mreže 2D izoparametarskih pravokutnih elemenata s osam čvorova i integracijskom shemom $3 \times 3 = 9$ Gaussovih (integracijskih) točaka.



Slika 6. 3D model konačnog elementa analiziranih naslaga tla (lijevo) s naznačenim mjernim točkama (desno). Točka 1 je točka koja je najbliža željezničkoj pruzi (na udaljenosti od 5 m), a udaljenost između mjerne točke iznosi 10 m



Slika 7. 2D model konačnih elemenata analiziranih naslaga tla

Ovaj je model obuhvatio izvor vibracija i pet kontrolnih (mjernih) točaka dodavanjem dodatnih mreža konačnih elemenata s lijeve i desne strane, unutar duljine 3 puta dubine naslaga (otprilike 20 m). Sve tri granične linije (dvije vertikalne i najniža horizontalna) modelirane su sa sprječenim pomacima duž dviju globalnih osi H, Y. Ovaj je model rezultirao potpunom dinamičkom analizom i pružio karakteristike prigušenja medija.

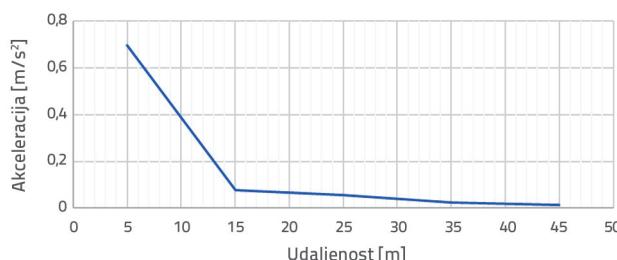
Krutost opruga u 3D modelu i konačna svojstva tla 2D i 3D modela kalibrirani su na takav način da su dobivene frekvencije (tj. vlastiti periodi vibracija naslaga) u logičnoj korelaciji s rezultatima dobivenim iz mjerjenja *in situ* numeričkim predviđanjima provedenih putem generaliziranog geotehničkog modela (GTM).

Tablica 2. Usporedba rezonantnih frekvencija u [Hz]

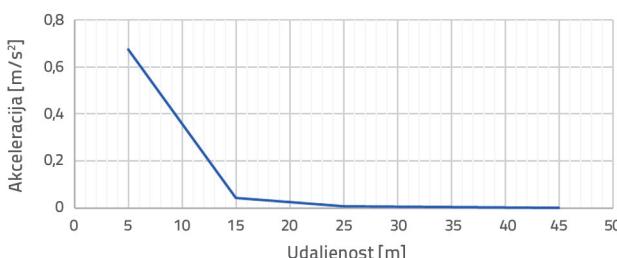
Mode	2D GTM	3D FEM	Test
1	7,188	7,427 (Y)	7,23 (X)
2	21,563	19,25 (X)	19,82 (X)
3	35,938		34,86 (X)
4	50,313		46,28 (X)
5	64,688		
6	79,063		82,45 (Y)
7	93,438		95,01 (Y)

2D GTM (tj. izrazi (3)–(6)) omogućili su dobivanje vlastitih frekvencija vibracija razmatranih naslaga, kako su navedene u tablici 2., te one iz 3D FEM-a. Osim toga, tablica 2. uspoređuje rezonantne frekvencije vibracija dobivene mjerjenjima, uzimajući u obzir Fourierov spektar prikazan na slici 1. Nadalje, tablica 2. navodi smjer (X ili Y) koji se odnosi na dobivanje frekvencija vibracija. Rezultati očito pokazuju valjanost i praktičnost 2D GTM-a unatoč njegovim očitim nedostacima. No, što je još važnije, modeli konačnih elemenata su verificirani, što dodatno omogućuje dinamičku analizu (tj. simulaciju širenja vibracija kroz tlo).

Prikazani su rezultati dinamičke analize za slučaj korištenja udarnog (dinamičkog) opterećenja kao izvora vibracija, dobiveni iz 2D FEM. Provedena je dinamička analiza pomoću Wilsonove postupne θ metode i usvajanja $\theta = 1,37$. Dijagrami za prigušenje amplituda vršnih ubrzanja u funkciji udaljenosti prikazani su na slikama 8. i 9. Uspoređene su krivulje prigušenja dobivene u vertikalnom, Z-smjeru (tj. između rezultata dobivenih numerički korištenjem FEM-a (slika 8.) i one izmjerene *in situ* (slika 9.). Slične usporedbe dobivene su za horizontalne pravce X i Y [23].



Slika 8. Krivulja prigušenja dobivena u smjeru z uslijed dinamičke pobude udarnim opterećenjem; numerička analiza izvedena metodom FEM



Slika 9. Krivulja prigušenja dobivena u smjeru z uslijed dinamičke pobude udarnim opterećenjem; rezultati mjerjenja *in situ*

Na temelju usporednih krivulja prigušenja i s obzirom na njihovu logičku korelaciju, očito je da bi numeričko modeliranje i predviđanje prigušenja intenziteta vibracija pomoću metode FEM trebalo predstavljati sastavni dio postupka procjene utjecaja vibracija uzrokovanih željezničkim prometom na građevine i ljudi u okolnom području te plan mogućih rješenja za njihovo smanjenje. Svakako, rezultati numeričkih analiza bit će precizniji ako se preciznije definiraju ulazni parametri, odnosno elastično-mehanička svojstva materijala tla kroz koje se šire valovi, geometrijske karakteristike i smjerovi u prostoru. Ovo pokazuje da klasični FEM, temeljen na teoriji elastičnosti, može biti koristan u izradi krivulja prigušenja, tj. krivulja utjecaja vibracija ovisnog o udaljenosti od izvora. Numeričke analize u ovom istraživanju dovršene su korištenjem softverskog paketa FELISA/3M, razvijenog u UKIM-IZIIS u Skoplju [30].

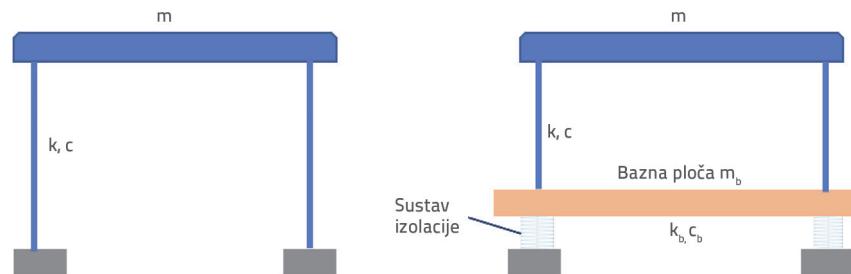
3. Mjere za ublažavanje vibracija

Prema [31], smanjenje intenziteta vibracija može se postići na sljedeće načine:

- povećanjem elastičnosti kolosiječne konstrukcije željezničke pruge
- uklanjanjem površinskih diskontinuiteta na tračnici kroz koje se šire vibracije
- redovitim održavanjem vozne površine tračnice
- redovitim održavanjem (ponovnim profiliranjem) kotača vozila
- izborom odgovarajućeg tipa željezničkog vozila
- smanjenjem brzine željezničkih vozila.

Prethodno je istraživanje [22] istaknuto da je najučinkovitiji način kontrole vibracija kontroliranjem vibracija na izvoru. Stoga bi za izgradnju željezničke pruge glavne mjeru koju bi se moglo poduzeti moglo biti sljedeće:

- stabilizacija donjeg ustroja pruge
- izgradnja kolosijeka na čvrstoj podlozi ili u kolosiječnom zastoru
- postavljanje elastomernih podložaka ispod pragova (USP)
- postavljanje mehanički zbijenog stabilizirajućeg sloja ispod zastorne prizme
- postavljanje barijera duž trase.



Slika 10. Neizolirani (lijevo) i izolirani (desno) sustavi

3.1. Predložene mjere za smanjenje vibracija duž željezničke pruge Kumanovo–Deljadrovci

Primjena podložaka ispod pragova nametnula se kao najprikladnije rješenje za maksimalnu brzinu vlaka od 120 km/h na dionici pruge Kumanovo–Deljadrovci, s obzirom na to da je predviđena samo zamjena drvenih poprečnih pragova betonskim bez promjena na kolosiječnom zastoru.

Rješenje praktički predstavlja jednu vrstu vibracijske izolacije temelja koja se može primijeniti i za zaštitu građevinskih objekata u blizini željezničke pruge. Metodologija primjene vibracijske izolacije postavljanjem elastomernih podložaka ispod poprečnih pragova temelji se na standardnoj metodi izolacije temelja građevina (slika 10.). Koristeći ulazne podatke, može se procijeniti izvedba elastomernih podložaka pomoću jednostavnih dinamičkih modela mase i opruge. Parametri koji utječu na učinkovitost izolacije su masa kolosijeka i krutost izolirajućeg materijala.

Dinamički parametri neizoliranog sustava (tj. sustava u direktnom kontaktu s temeljima), prikazanog na lijevoj strani slike 10., definirani su sljedećim temeljnim jednadžbama za kutnu frekvenciju vibracija, ω_f , period vibracije, T_f i prigušenje (ξ_f):

$$\omega_f = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (10)$$

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f} \quad (11)$$

$$\xi_f = \frac{c}{2m\omega_f} \quad (12)$$

Dinamički parametri sustava s izoliranim temeljima (tj. koji nije u direktnom kontaktu s temeljima), prikazanog na desnoj strani slike 10., definirani su sljedećim izrazima za kutnu frekvenciju vibracija (ω_b), period vibracije (T_b) i prigušenje (ξ_b):

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b} \quad (13)$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k}{m+m_b}} \quad (14)$$

$$\xi_b = \frac{c_b}{2(m+m_b)\omega_b} \quad (15)$$

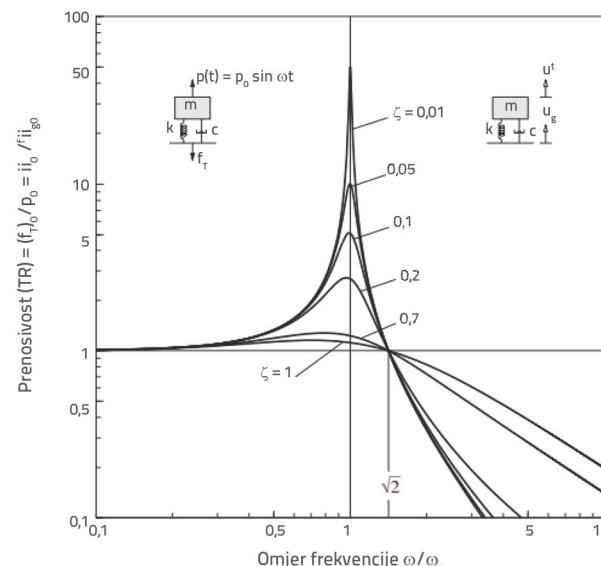
Prema navedenim jednadžbama, sustav s izoliranim temeljima ima vlastitu frekvenciju nekoliko puta manju od frekvencije neizoliranog sustava. Ovaj je pristup potom primijenjen za smanjenje

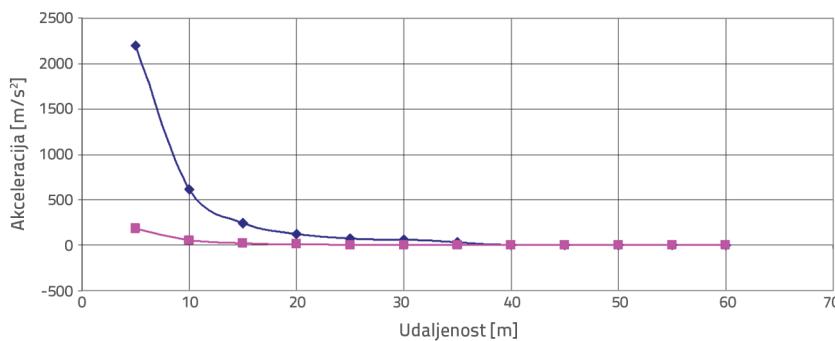
razine vibracija na kritičnim udaljenostima promatranih građevina u blizini željezničke pruge. Teorija izolacije temelja općenito se povezuje s faktorom prijenosa (TR) [32] koji ovisi o omjeru frekvencije pobude (ω) i vlastite frekvencije sustava (ω_n), slika 11.

TR se izražava kao funkcija omjera frekvencije pobude i vlastite frekvencije (ω/ω_n) i prigušenja (ξ) kao što je izraženo izrazom (16):

$$TR = \frac{\ddot{u}_0^t}{\ddot{u}_{go}} = \left\{ \frac{1 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2} \right\}^{1/2} \quad (16)$$

Ako je (ω/ω_n) omjer veći od $(2)^{1/2}$, TR se smanjuje. Primjenom izolacije temelja ovaj se faktor može smanjiti na dopuštenu vrijednost vibracija na izvoru.

Slika 11. Faktor prijenosa (TR) kao funkcija omjera frekvencija (ω/ω_n) i prigušenja [32]



Slika 12. Modificirane krivulje prigušivanja koje se odnose na 'RP-3 Romanovce' s neizoliranim (plava linija) i izoliranim (crvena linija) poprečnim pragovima

Evaluacija potrebnih mjera započela je s prognoziranim razinama vibracija za mjerne profile duž željezničke pruge primjenom metodologije predstavljene u poglavlju 2. Prema krivuljama prigušenja, kritična udaljenost na kojoj su vibracije još uvijek iznad dopuštene razine je približno 30 m od izvora za gotovo svih sedam razmatranih profila duž dionice pruge Kumanovo–Deljadrovci. Građevine su identificirane u označenim zonama (žarištima) u kojima je došlo do prekoračenja dopuštene granice. Na temelju ove procjene izračunana je potrebna izolacija željezničkih poprečnih pragova za smanjenje vibracija na lokacijama tih građevina. Više pojedinosti o tim izračunima navedeno je u [22]. Za slučaj analiziran u prethodnom odjeljku, točnije, za 'RP-3 Romanovce' (km 417+300) gdje su stambene kuće smještene na udaljenosti od 22 do 50 m, krivulje prigušenja dokazale su nužnost mjera za smanjenje razine vibracija.

Odabirom odgovarajućeg elastomernog materijala podloške debljine 20 mm za vibracijsku izolaciju (tj. postavljanje USP-a), pri prolasku konvencionalnog vlaka s opterećenjem od 225 kN, TR je smanjen na potrebnu razinu vibracija na izvoru, kao što je prikazano na modificiranim krivuljama prigušenja (slika 12. 'RP-3 Romanovce'). Na kritičnoj udaljenosti od 20 m od 'RP-3 Romanovce', razina vibracijskih ubrzanja prije primjene mjera bila je $126,7 \text{ mm/s}^2$. Nakon ugradnje elastomernih podložaka ispod poprečnih pragova, ta je razina smanjena na dopuštenih $10,37 \text{ mm/s}^2$.

3.2. Dodatna razmatranja

Da bi se primjenio numerički postupak za proračun potrebnih karakteristika izolacijskih materijala opisanih u poglavlju 3.1., potrebno je dodatno ispitivanje dodatnim mjeranjima kroz primjenjene mjere. Izraz (16) obično može definirati, s dovoljnom razinom točnosti, potrebnu frekvenciju za dobivanje odgovarajućeg TR. Međutim, u praksi je poželjno koristiti modele konačnih elemenata opisane u poglavlju 2. To uključuje varijaciju elastično-mehaničkih i geometrijskih karakteristika ugrađenih izolacijskih materijala tako da izolirani sustav postigne odgovarajuću vlastitu frekvenciju ω_n . U isto vrijeme, predloženi model konačnih elemenata može se izravno koristiti za dobivanje krivulja prigušenja, bez potrebe za dodatnim mjeranjima.

Štoviše, model se može implementirati sa smanjenim brojem točaka na kojima je potrebno provesti ova mjerena. Na taj način, okvir aktivnosti opisanih u poglavlju 2. nadopunjuje se aktivnostima opisanima u poglavlju 3. kako bi se dobila cijelovita procedura za rješavanje visokih razina vibracija uzrokovanih željezničkim prometom.

4. Zaključak

Predloženi integrirani metodološki pristup sadrži aktivnosti koje uključuju mjerena *in situ* i analize specifično odabralih lokacija u urbanim i ruralnim sredinama duž željezničke pruge. Aktivnosti vezane uz definiranje i provjeru numeričkih modela temeljenih na metodi FEM primjenjuju se za provjeru krivulja prigušenja dobivenih mjeranjima *in situ* i aktivnosti vezanih uz potrebne mjere za uklanjanje ili smanjenje utjecaja vibracija na ljudi i obližnje građevine. Ukratko, zaključci istraživanja su sljedeći:

- Željeznički promet predstavlja značajan izvor vibracija koje mogu utjecati na kvalitetu života ljudi koji se nalaze u blizini željezničkih pruga s frekventnim prometom.
- Zasad u Sjevernoj Makedoniji ne postoje nacionalne smjernice ili norme koje se odnose na probleme povezane s povećanom razinom vibracija iz različitih izvora i njihovim učinkom na obližnje građevine.
- Cilj mjeranja *in situ* bio je konstruirati krivulje prigušenja (tj. definirati odnos između vibracijskih ubrzanja dobivenih u istraživanju) koje predstavljaju način mjeranja za razinu vibracija i udaljenost od izvora. Korištenjem odgovarajućih standardiziranih krivulja (analiza u sklopu istraživanja provedena je primjenom poljskih normi [13, 33] koje se temelje na ISO normama) stvara se mogućnost definiranja sigurnog razmaka za građevine, odnosno razmaka na kojem bi razina vibracija bila ispod dopuštene razine koju ljudi mogu percipirati.
- Istraživanja su praktično provedena na željezničkom koridoru duž dionice Kumanovo–Deljadrovci. Analiza se temeljila na eksperimentalnom određivanju krivulja prigušenja na sedam profila duž dionice i mjeranjima vibracija uzrokovanih prometom putničkih i teretnih vlakova kroz naselje Brzak. Prema analizi, za krajnju vrijednost vibracija pri ubrzanju od 10 mm/s^2 očekuje se prekoračenje u rasponu udaljenosti od 0 do 20 m, lijevo i desno od željezničke pruge.
- Numeričko modeliranje i analiza kritičnog profila primjenom FEM-a pokazalo se ključnim u slučajevima kada je potrebna opsežno istraživanje za šire analiziranu domenu. Krivulje prigušenja dobivene numeričkim modelima i mjeranjima pokazuju logičnu korelaciju, što pokazuje da se parametri razine prigušenja vibracija mogu numerički predvidjeti za veći dio obrađenog područja, čime se smanjuju mjerena *in situ* i znatno štede resursi.

- Predloženi integralni metodološki pristup omogućuje definiranje potrebnih mjera za smanjenje utjecaja vibracija za razmatrane profile. Za predviđanje odziva sustava (tj. dobivanje razine vibracija s definiranim mjerama) može se koristiti pojednostavljeni proračun ili numerički model

postojećeg stanja koji je odgovarajuće kalibriran u skladu s predloženim mjerama.

- Predloženi integrirani metodološki pristup s opisanim koracima pruža čvrstu osnovu za daljnja istraživanja u ovom području.

LITERATURA

- [1] Naumovski, N., Hristovski, V., Krstevska, L.: In-situ measurements and numerical modeling of railway traffic -induced ground vibrations in urban areas, Proceedings of the 1st Croatian Conference on Earthquake Engineering - 1CroCEE, 22 - 24 March 2021, Zagreb, Croatia, Paper ID 108, <https://doi.org/10.5592/C0/1CroCEE.2021.108>.
- [2] Erkal, A.: Transmission of Traffic-induced Vibrations on and around the Minaret of Little Hagia Sophia, International Journal of Architectural Heritage, 11 (2017) 3, pp. 349-362; <https://doi.org/10.1080/15583058.2016.1230657>.
- [3] Built Heritage: Monitoring Conservation Management, (Eds.: Toniolo, L., Boriani, M., Guidi, G.): Springer Cham, 2015, ISBN 978-3-319-08532-6, <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08533-3>.
- [4] Haladin, I., Bogut, M., Lakušić, S.: Analysis of Tram Traffic Induced Vibration Influence on Earthquake Damage Buildings, Buildings, 11 (2021) 12, pp. 590; <https://doi.org/10.3390/buildings11120590>.
- [5] Lakušić, S., Haladin, I., Vranešić, K.: Railway infrastructure in earthquake affected areas, Građevinar, 72 (2020) 10, pp. 905-922, <https://doi.org/10.14256/JCE.2967.2020>
- [6] Vranešić, K., Lakušić, S., Serdar, M.: Corrosion and stray currents at urban track infrastructure, GRAĐEVINAR, 72 (2020) 7, pp. 593-606, <https://doi.org/10.14256/JCE.2909.2020>
- [7] Sluganović, V., Lakušić, S., Lazarević, D.: Track ballast modelling by discrete element method, GRAĐEVINAR, 71 (2019) 7, pp. 589-600, <https://doi.org/10.14256/JCE.2350.2018>
- [8] Ovchinnikov, D., Bondarenko, A., Kou, L., Sysyn, M.: Extending service life of rails in the case of a rail head defect, GRAĐEVINAR, 73 (2021) 2, pp. 119-125, <https://doi.org/10.14256/JCE.2860.2019>
- [9] Haladin, I., Lakušić, S., Bogut, M.: Overview and analysis of methods for assessing ride comfort on tram tracks, GRAĐEVINAR, 71 (2019) 10, pp. 901-921, <https://doi.org/10.14256/JCE.2731.2019>
- [10] DIN 4150-2: Structural Vibration – Human Exposure to Vibration in Buildings, June 1999.
- [11] BS 6472-1:2008, Guide to evaluation of human exposure to vibration in buildings, Part 1: Vibration sources other than blasting, 2008
- [12] Kowalska-Koczwara, A., Stypula, K.: Assessment of The Vibration Influence on Humans in Buildings in The Standards of Different Countries, WMCAUS 2016
- [13] PN-88/B-02171:1988, Evaluation of vibrations influence on people in buildings, Polish Committee for Standardization, 01-12-2013.
- [14] ANSI S2.71-1983 R20 EDITION: Guide to the Evaluation of Human Exposure to Vibration in Buildings, American National Standards Institute, June 1, 2020.
- [15] AS 2670.2-1990: Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Continuous and shock-induced vibration in buildings (1 Hz to 80 Hz), Council of Standards Australia, 1990.
- [16] AIJ-GEH-2004: Guidelines for the evaluation of habitability to building vibration, 2007, Architectural Institute of Japan.
- [17] DIRECTIVE (EU) 2016/797 of the European Parliament and of the Council of 11 May 2016 on the interoperability of the rail system within the European Union ETABS computer software, Computers and Structures Inc., Berkeley, California
- [18] Goldman, D.E., Von Gierke, H.E.: The effects of shock and vibration on man, American National Standards Institute, 1960.
- [19] Griffin, M.J.: Handbook of Human Vibration, ISBN 0-12-303040-4, ACADEMIC PRESS LIMITED, 1990.
- [20] Schiavi, A., Rossi, L.: Vibration Perception in Buildings: A Survey. From the Historical Origins to the Present Day, Energy Procedia 78, 2-7 October 2015; <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2015.11.094>.
- [21] Railway Induced Vibration, State of the art report, ISBN 978-2-7461-2663-3, International Union of Railways (UIC) - Paris, November 2017.
- [22] TEUOPRD: Preparation of Project and Design Documentation for the Railway Sections Along the Corridor X Including Branch Xd, Ref. No. EuropeAid/130167/D/SER/MK, January 2014, Vibration Impact study, Section Kumanovo - Deljadrovci, Variant 120 km/h, DEKONS EMA.
- [23] Naumovski, N.: Integrated Methodological Approach to Analysis of Railway Traffic Vibration Impact on People and Facilities. Ph.D. thesis, November 2021, UKIM-IZIIS, Skopje.
- [24] ISO 2631-1:1997: Mechanical Vibration and Shock – Evaluation of Human Exposure to Whole Body Vibration – Part 1: General requirements.
- [25] ISO 2631-2:2003: Mechanical vibration and shock – Evaluation of human exposure to whole body vibration – Part 2: Vibration in buildings (1 Hz to 80 Hz).
- [26] Yang, Y.B., Hung, H.H.: Wave Propagation for Train-Induced Vibrations, A Finite/Infinite Element Approach, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London
- [27] Ferrara, R.: A Numerical Model to Predict Train Induced Vibrations and Dynamic Overloads, Ph.D. thesis, University of Reggio, Calabria.
- [28] Stojkovic, M.B.: Characteristics of Microtremors and Geotechnical Modelling of the Local Soil Structure. 2017, UKIM-IZIIS, Skopje.
- [29] Lama, R.D., Vutucuri, V.S.: Handbook on mechanical properties of rocks -testing techniques and results - Volume II. 1st ed. Clausthal, Germany: Trans Tech Publications
- [30] FELISA/3M, General purpose software package for analysis of structures, UKIM-IZIIS, 1990-2021
- [31] Lakušić, S., Ahac, M.: Rail traffic noise and vibration mitigation measures in urban areas, Tehnički vjesnik 19, 2 (2012), pp. 427-435.
- [32] Chopra, A.K.: Dynamics of structures, Theory and application to earthquake engineering, 5th edition, Pearson, 2020
- [33] Kowalska-Koczwara, A., Stypula, K.: Assessment of The Vibration Influence on Humans in Buildings in The Standards of Different Countries, WMCAUS, 2016.